

LAS SERIES DE TIEMPO FRACTALES Y UN MÉTODO DE PRONÓSTICO*

*Guillermo Romero-Meléndez,
Rogelio Ojeda-Suárez,
Agustín Nava-Huerta
y Carlos Alberto García-Valdez***

RESUMEN

Los autores presentan aquí un método de pronóstico para las series de tiempo fractales, y una variación de la fórmula de Feder que estimula el movimiento browniano fraccionario. Aplicamos este método a las cifras del índice de precios y cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores desde el 22 de noviembre de 2002 hasta el 16 de febrero de 2004. Por último, comparamos los resultados con otros dos métodos, incluyendo un método de pronóstico econométrico AR(1).

ABSTRACT

The authors present here a forecast method for fractal time series, and a variation of the formula of Feder, which simulates fractional brownian motion. We applied this method to the daily returns of the Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) of the Mexican Stock Market, from November 22, 2002 to February 16, 2004. Finally we compare the results with other two methods, including an econometric AR(1) prediction method.

* *Palabras clave:* fórmula de simulación de Feder, serie de tiempos fractales, movimiento browniano fraccionario, exponente de Hurst. *Clasificación JEL:* C02 [traducción del inglés de Eduardo L. Suárez].

** Universidad de las Américas, Puebla (correo electrónico: guilleroa.romero@udlap.mx).

INTRODUCCIÓN

El movimiento browniano fraccionario, también llamado el paseo aleatorio sesgado o series de tiempo fractales, fue estudiado por Hurst en el decenio de los cuarenta del siglo pasado, y por Mandelbrot en los sesenta y setenta (véase Hurst, 1951, y Mandelbrot y Van Ness, 1969). Las aplicaciones de las series de tiempo fractales incluyen el estudio de la volatilidad, el riesgo y la eficiencia del mercado, entre otros (véase Peters, 1996, cap. 8, y Romero-Meléndez *et al*, 2005). Por lo que se refiere a la simulación del movimiento browniano fraccionario, Feder obtuvo en 1988 una fórmula para los incrementos del movimiento browniano fraccionario, empleando una versión discreta de una fórmula integral de Mandelbrot y Van Ness (véase Feder, 1988; Mandelbrot y Wallis, 1969; Mandelbrot y Van Ness, 1968, y Peters, 1996, apéndice 3). Utilizando la fórmula de Feder, el primero y el tercero de los autores de este artículo produjeron una fórmula de simulación, presentada aquí, para un movimiento browniano fraccionario, cuya validez estadística quedó confirmada en la tesis del tercero de los autores, con la asesoría del primero (véase Nava-Huerta, 1996). En este artículo empleamos esa fórmula. Nuestro método de pronóstico consiste básicamente en la selección de la gráficas simuladas, las que permanecen durante la mayor parte del tiempo dentro de una ϵ -vecindad tubular alrededor de la gráfica real, durante un proceso en el que ϵ tiende a 0. Aplicamos el método de las cifras diarias del índice de precios y cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores, del 22 de noviembre de 2002 al 16 de febrero de 2004. Comparamos nuestros resultados con los obtenidos por otros dos métodos, incluido un método de pronóstico econométrico AR(1), y presentamos un estudio estadístico para los errores.

Este artículo muestra que los métodos de pronóstico fractales pueden competir con los econométricos, aunque subsiste la tarea de comparar este método con otros, incluidas las redes neurales. El método presentado aquí es una mejora de la tesis del cuarto autor, realizado con la supervisión del primero (véase García-Valdez, 1996). Las secciones I y II de este artículo mejoran el trabajo de tesis del segundo autor, realizado con la asesoría del primero, y se presentó en la Universidad de las Américas, Puebla (véase Ojeda-Suárez, 2004). Agradecemos a David Wetzell, quien asesoró al segundo autor en su tesis para obtener una parte importante de los resultados econométricos presentados aquí. Este artículo se escribió en la Universitá

degli Studi di Siena, donde el primer autor pasó su año sabático en 2004-2005. Agradecemos la gran hospitalidad de Lionello Punzo y de las autoridades de la Università degli Studi di Siena, así como el valioso apoyo de las autoridades de la Universidad de las Américas, Puebla.

I. EL MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONARIO Y SU SIMULACIÓN

Podemos explicar el movimiento browniano fraccionario como una función de $B_H(t)$, con la propiedad:

$$B_H(t) \sim t^H$$

con $t_2 > t_1$, $B_H(t_2) - B_H(t_1) \sim (t_2 - t_1)^H$, y $0 < H < 1$. Aquí H es el exponente de Hurst. Para $H = 1/2$ obtenemos el movimiento browniano, para $H < 1/2$ tenemos la persistencia y para $H > 1/2$ tenemos la antipersistencia. Más exactamente, el movimiento browniano fraccionario se define como sigue, (véase a Falconer, 1990):

El movimiento browniano fraccionario es un proceso aleatorio $B_H : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}$ en algún espacio de probabilidad tal que: *i*) con probabilidad 1, $B_H(t)$ es continua y $B_H(0) = 0$; *ii*) para todo $t > 0$ y $h > 0$, el incremento $B_H(t+h) - B_H(t)$ tiene la distribución normal con media 0 y varianza h^{2H} .

La gráfica de movimiento browniano fraccionario con exponente de Hurst H tiene Hausdorff y dimensión de caja $2 - H$ (véase Falconer, 1990, y el teorema 1 de Barnsley, 1988).

1. La fórmula de la simulación de Feder

Feder produjo en 1988 una fórmula para la simulación de las series de tiempo fractales, a partir de una secuencia de números Aleatorios gaussianos (véase Feder, 1988, y Peters, 1996, apéndice 3). Su fórmula para los incrementos de un movimiento browniano fraccionario es:

$$B_H(t) - B_H(t-1) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \epsilon_i \left(\sum_{j=1}^{n(M-t)+i} \epsilon_j \right)^{H-1/2} \left(\sum_{k=1}^{n(M-1)+i} \epsilon_k \right)^{H-1/2} \epsilon_i$$

Aquí $\{ \epsilon_i \}$ es un conjunto de variables aleatorias gaussianas con varianza unitaria y media 0. M es el número de periodos. La unidad de tiempo se divide en n intervalos (véase Feder, 1988).

Feder obtuvo su fórmula empleando una versión discreta (véase Mandelbrot y Wallis, 1969) de la integral siguiente (véase Mandelbrot y Van Ness, 1968):

$$B_H(t) = \frac{1}{H} \int_0^t (t - \tau)^{H-1/2} dB(\tau)$$

Esta integral muestra que los valores de la función $B_H(t)$ dependen de todos los incrementos anteriores $dB(\tau)$ en el momento $t - \tau$ de un proceso aleatorio gaussiano ordinario $B(t)$ con media 0 y varianza unitaria.

2. Una variación de la fórmula de Feder

De la fórmula de Feder para los incrementos de un movimiento browniano fraccionario, el primero y el tercero de los autores derivaron la siguiente fórmula de simulación para un movimiento browniano fraccionario:

$$B_H(t) = \frac{n^{-H}}{H} \sum_{i=1}^{nt} \epsilon_i^{H-1/2} \left(\sum_{j=1}^{n(M-t)-i} \epsilon_j^{H-1/2} \right) \left(\sum_{k=1}^{n(M-t)-i} \epsilon_k^{H-1/2} \right) \left(\sum_{l=1}^{n(M-t)-i} \epsilon_l^{H-1/2} \right)$$

Como antes, $\{ \epsilon_i \}$ es un conjunto de variables aleatorias gaussianas con varianza unitaria y media 0. M es el número de periodos, y la unidad de tiempo se divide en n intervalos.

La fórmula se obtuvo como sigue: primero, reescribimos el segundo término de la fórmula de Feder en la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n(M-1)} \left(\sum_{j=1}^{n(M-1)-i} \epsilon_j^{H-1/2} \right) \left(\sum_{k=1}^{n(M-1)-i} \epsilon_k^{H-1/2} \right) \left(\sum_{l=1}^{n(M-1)-i} \epsilon_l^{H-1/2} \right)$$

Por tanto, la fórmula de Feder luce ahora como sigue:

$$B_H(t) = B_H(t-1) + \frac{n^{-H}}{H} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^{H-1/2} \sum_{j=1}^{n(M-t)+i} (i+j)^{H-1/2} (i-j)^{H-1/2} \sum_{k=1}^{nM} (i+k)^{H-1/2} (i-k)^{H-1/2} \sum_{l=1}^{n(M-t)+i} (i+l)^{H-1/2} (i-l)^{H-1/2}$$

Si aplicamos la última fórmula para el intervalo $[0, t]$, en lugar del intervalo $[0, 1]$, y dividimos la unidad de tiempo en n intervalos de igual longitud, obtenemos la fórmula siguiente, utilizando el hecho de que $B_H(0) = 0$:

$$B_H(t) = \frac{n^{-H}}{H} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nt} i^{H-1/2} \sum_{j=1}^{(n(M-t)+i)} (i+j)^{H-1/2} (i-j)^{H-1/2} \sum_{k=1}^{nM} (i+k)^{H-1/2} (i-k)^{H-1/2} \sum_{l=1}^{(n(M-t)+i)} (i+l)^{H-1/2} (i-l)^{H-1/2}$$

Reescribimos el segundo término de la última expresión como sigue:

$$\sum_{i=1}^{nM} (i^{H-1/2} (i-nt)^{H-1/2}) \sum_{j=1}^{(n(M-t)+i)} (i+j)^{H-1/2} (i-j)^{H-1/2} \\ \sum_{k=1}^{nM-nt} ((k-nt)^{H-1/2} k^{H-1/2}) \sum_{l=1}^{(n(M-t)+i)} (i+l)^{H-1/2} (i-l)^{H-1/2} \\ \sum_{i=1}^{n(M-t)} ((nt-i)^{H-1/2} i^{H-1/2}) \sum_{j=1}^{(n(M-t)+i)} (i+j)^{H-1/2} (i-j)^{H-1/2}$$

Por tanto, obtenemos:

$$B_H(t) = \frac{n^{-H}}{H} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nt} i^{H-1/2} \sum_{j=1}^{(n(M-t)+i)} (i+j)^{H-1/2} (i-j)^{H-1/2} \sum_{k=1}^{n(M-t)} ((nt-i)^{H-1/2} i^{H-1/2}) \sum_{l=1}^{(n(M-t)+i)} (i+l)^{H-1/2} (i-l)^{H-1/2}$$

La validez de la fórmula fue confirmada en la tesis de licenciatura del tercer autor de este artículo, con la supervisión del primero (véase Nava-Huerta, 1996).

II. UN MÉTODO DE PRONÓSTICO PARA LAS SERIES DE TIEMPO FRACTALES

Presentamos aquí un método de pronóstico para las series de tiempo fractales o movimiento browniano fraccionario. Este método se aplicó a las cifras

del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. El método básico consiste en los pasos siguientes:

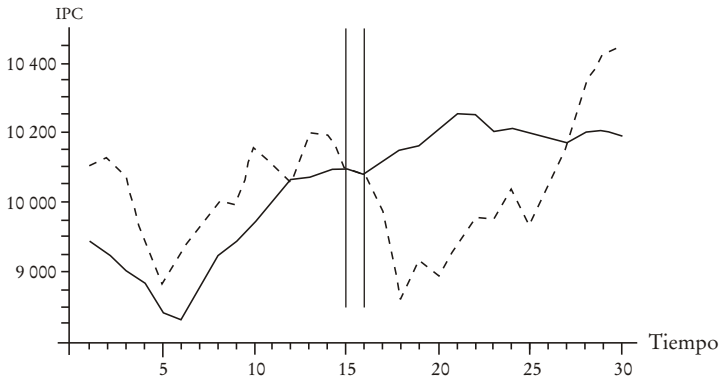
- i) Primero calculamos el exponente de Hurst de un periodo anterior. Empleando el método del conteo de caja, calculamos la dimensión fractal D de la gráfica correspondiente a los rendimientos del IPC, del 22 de noviembre de 2002 al 16 de febrero de 2004, y obtuvimos el valor de su exponente de Hurst $H = 2 - D = 0.7812$.
- ii) Luego elaboramos gráficas de simulación para 30 días. Empleamos nuestra fórmula de simulación para elaborar 225 series de tiempo fractales, simulando 25 gráficas de 30 puntos para cada uno de los valores siguientes de H , alrededor del valor calculado del periodo anterior: .7321, .7449, .757, .7691, .7812, .7933, .8054, .8175, .8296.
- iii) Luego reescalamos las gráficas y escogimos la más cercana a la real. Estudiamos la evolución de las gráficas simuladas respecto a la real, en los 15 días siguientes al 17 de febrero de 2004. Reescalamos las gráficas simuladas a fin de tener el mismo máximo y mínimo de la gráfica IPC real durante ese periodo de 15 días. Luego escogimos las gráficas que permanecen más tiempo (durante los 15 días) dentro de la ϵ -vecindad tubular de la gráfica real con los valores siguientes de ϵ : 50, 25, 25/2, ..., 25/16.
- iv) Finalmente aplicamos una translación vertical a las gráficas simuladas a fin de que las series simuladas y el IPC tengan el mismo valor en el día número 15.

1. Resultados del método de pronóstico en la predicción de un día

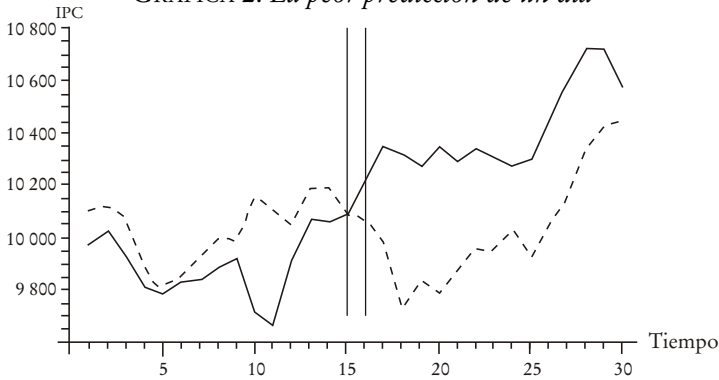
Aplicamos 50 veces el método antes descrito y obtuvimos 102 gráficas simuladas. Presentamos los resultados obtenidos cuando aplicamos nuestro método de pronóstico para predecir el valor del IPC en el día número 16 (pronóstico de un día). Mostramos nuestra mejor y nuestra peor predicciones, así como la distribución de los errores, y presentamos una gráfica del error porcentual como una función del número de días pronosticados.

a) *La mejor y la peor predicciones de un día.* En las gráficas 1 y 2 se muestran la mejor y la peor de nuestras predicciones de un día. El día pronosticado es el día número 16. En cada gráfica, la línea de guiones corresponde a la gráfica real del IPC, mientras que la continua es la gráfica simulada. Los errores son: .0027% para la mejor, y 1.38% para la peor, respecto al valor del IPC.

GRÁFICA 1. *La mejor predicción de un día*



GRÁFICA 2. *La peor predicción de un día*



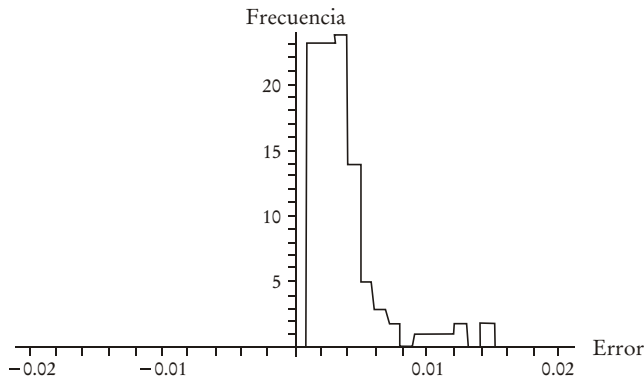
b) *La distribución de los errores relativos en la predicción de un día.* La gráfica 3 corresponde al histograma con la distribución de las frecuencias del valor absoluto de los errores relativos en la predicción de un día. La media de los datos es 0.00282713, la mediana es 0.00210516, y la varianza es 0.00000742799.

c) *El error medio como una función del tiempo en la predicción.* La gráfica 4 corresponde a la media del valor absoluto de los errores porcentuales en la predicción, como una función del número de días pronosticados.

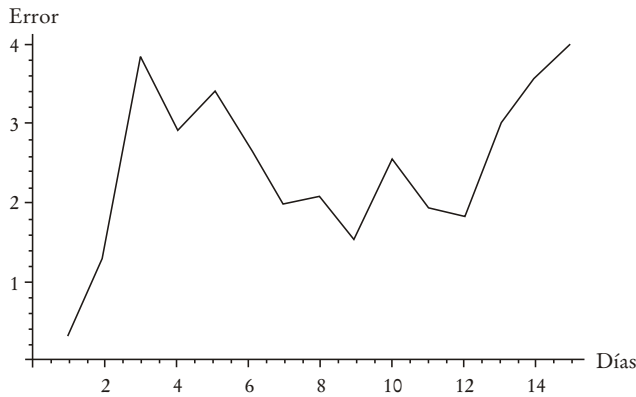
2. Comparación con otros métodos

En esta parte comparamos los resultados obtenidos en la subsección 1 con los resultados de otros dos métodos. El primer método (lo llamamos aquí el

GRÁFICA 3. Errores relativos en la predicción de un día



GRÁFICA 4. Error porcentual medio en el método fractal



“método ingenuo”) consiste en tomar el último valor real como la predicción del día siguiente, ya que las cifras del IPC eran independientes, o tienen una memoria de corto plazo (véase Peters, 1994, cap. 3). El segundo método se explica en la subsección siguiente.

a) *Un método econométrico.* Se aplicó un proceso autorregresivo de primer orden, o AR(1), a las diferencias porcentuales de las cifras del IPC, correspondientes a las fechas del 22 de noviembre de 2002 al 16 de febrero de 2004:

$$dPIC_t = \frac{IPC_t - IPC_{t-1}}{IPC_{t-1}}$$

Eso significa que se aplicó un modelo de la forma:

$$dIPC_t = \alpha + \beta dIPC_{t-1} + e_t$$

en que α y β son ciertos parámetros, y la serie $\{e_t\}$ tiene las propiedades:

$$E(e) = 0 \text{ y } E(ee) = \frac{2}{c} I$$

Véase mayores detalles en Johnston (1984), cap. 8. Se corrió una regresión mediana empleando el paquete STATA, y se obtuvieron los resultados siguientes:

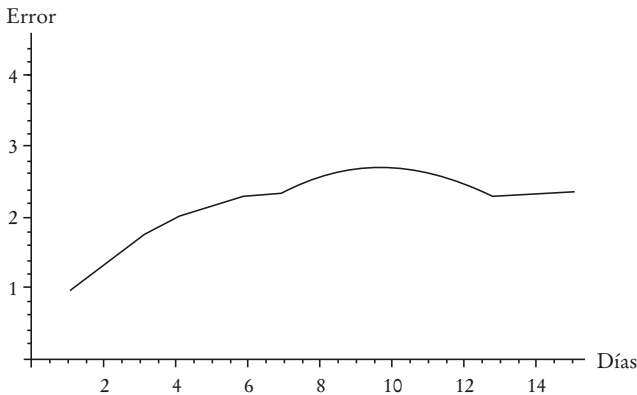
<i>mediana</i>	0.0983064	valor del estadístico <i>t</i>	1.73
<i>mediana</i>	0.00129003	valor del estadístico <i>t</i>	2.42

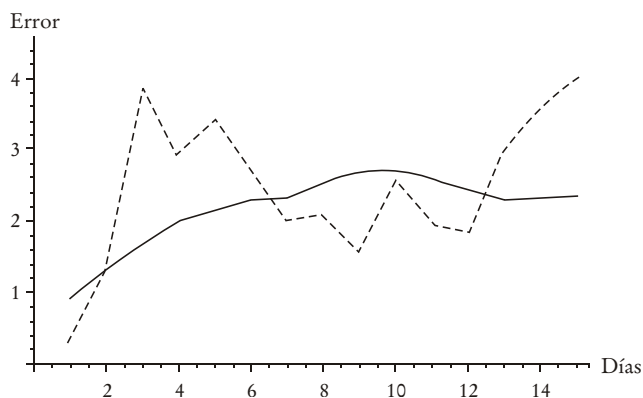
Los valores obtenidos son estadísticamente significativos porque los valores del estadístico *t* son cercanos a 2 o mayores. El dibujo siguiente corresponde a la media del valor absoluto de los errores porcentuales en la predicción, como una función del número de días pronosticados.

b) *Comparación de los resultados.* El cuadro 1 muestra los resultados del método fractal, el método ingenuo y el método econométrico respecto a la predicción de un día. En el método ingenuo, el error presentado es la media del valor absoluto de los errores relativos, en los pronósticos de un día, durante los primeros 15 días del periodo estudiado. El método fractal obtuvo el mejor resultado.

La gráfica 6 muestra las curvas juntas correspondientes al error medio, como una función del número de días pronosticados, para el método fractal

GRÁFICA 5. Error porcentual medio en el método econométrico



GRÁFICA 6. *Error porcentual medio para el método fractal (línea de guiones) y el método econométrico*CUADRO 1. *Errores en el pronóstico de un día (Porcentaje)*

	<i>Fractal</i>	<i>Ingenuo</i>	<i>Econométrico</i>
Error porcentual	0.28	0.82	0.88

y el método econométrico. La línea de guiones corresponde a la curva del método fractal.

Podemos observar que el método econométrico tiene resultados un poco mejores, en la predicción a largo plazo, que el método fractal: en 8 de los 15 días su error es menor que el del método fractal.

CONCLUSIONES

Presentamos un método de pronóstico fractal basado en una variación de la fórmula de Feder para la simulación del movimiento browniano fraccionario. Hicimos una comparación de los resultados con los obtenidos con un método econométrico (un proceso autorregresivo de primer orden), y el método de pronóstico consistente en tomar el último valor real como el pronóstico de un día. El método fractal mostró el mejor desempeño en el pronóstico de un día. Por otra parte, los resultados del método econométrico fueron un poco mejores que los resultados del método fractal en el pronóstico de largo plazo. Este artículo muestra que los métodos de pronóstico fractales pueden competir con los econométricos, aunque continúa pendiente la comparación de este método con otros, incluidas las redes neurales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barnsley, M. F. (1988), *Fractals Everywhere*, Academic Press.
- Falconer, K. (1990), *Fractal Geometry*, John Wiley and Sons.
- Feder, J. (1988), *Fractals*, Plenum Press.
- García-Valdez, C. A. (1996), “Algoritmos de extrapolación para el movimiento browniano fraccionario y sus aplicaciones a la economía”, tesis de licenciatura en Actuaría, Universidad de las Américas, Puebla.
- Hurst, H. E. (1951), “Long-term Storage of Reservoirs”, *Transactions of the American Mathematical Society of Civil Engineers* 116.
- Johnston, J. (1984), *Econometric Methods*, McGraw-Hill.
- Mandelbrot, B., y J. van Ness (1968), “Fractional Brown Motion, Fractional Noises and Applications”, *SIAM Review* 10.
- , y J. Rl Wallis (1969), “Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises”, *Water Resour. Res.* 5.
- Nava-Huerta, A. (1996), “Validación estadística de una nueva fórmula para simular movimiento browniano fraccionario”, tesis de licenciatura en Actuaría, Universidad de las Américas, Puebla.
- Ojeda-Suárez, R. (2004), “Métodos de predicción para series de tiempo fractales”, tesis de licenciatura en Matemáticas y Economía, Universidad de las Américas, Puebla.
- Peters, E. (1994), *Fractal Market Analysis*, John Wiley and Sons.
- (1996), *Chaos and Order in the Capital Markets*, John Wiley and Sons.
- Romero-Meléndez, G., M. Barroso Castorena, J. Huerta González, M. Santiago Bringas y C. A. García Valdez, (2005), “The Fractal Structure, Efficiency, and Structural Change: The Case of the Mexican Stock Market”, J. Leskow, M. Puchet, L. Punzo (comps.), *New Tools for Qualitative Analysis of Dynamic Economies*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 551, Springer Verlag.