EL TRIMESTRE ECONÓMICO, vol. LXXVII (2), núm. 306, abril-junio de 2010, pp. 473-503

NOTAS Y COMENTARIOS

VALOR DE UNA EMPRESA EN RIESGO DE EXPROPIACIÓN EN UN ENTORNO DE CRISIS FINANCIERA

Caso Banamex*

Salvador Cruz Aké y *Francisco Venegas-Martínez***

RESUMEN

Este artículo aplica la metodología de opciones reales en la valoración de empresas que por alguna circunstancia están sujetas a una posible expropiación. El trabajo añade, a la valoración por flujos de efectivo descontados, el valor de la prima que deberían recibir los accionistas como compensación por el riesgo de expropiación. Para ello se supone que los rendimientos de las empresas con amenaza de una posible expropiación son conducidos por un proceso de difusión con saltos en caso de crisis financiera. En esta investigación se valora la opción real de expropiación (opción de compra), en la que, a petición del gobierno, el inversionista deberá entregarle la empresa (el activo subyacente) al gobierno a cambio de una indemnización (precio de ejercicio). Por último, la metodología desarrollada es aplicada al caso de Banamex.

ABSTRACT

This paper applies the methodology of real options for valuing firms that for any reason are subject to a possible expropriation. In the development of this research is added to the valuation by discounted cash flows the value of the premium which

* *Palabras clave*: riesgo de expropiación, administración de riesgos, métodos de simulación, programación dinámica. *Clasificación JEL*: G32, C02, C15, C52, C61. Artículo recibido el 1 de diciembre de 2009 y aceptado el 8 de enero de 2010.

** Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía (correos electrónicos: salvador.ake22@gmail.com y fvenegas1111@ yahoo.com.mx).

shareholders would receive as compensation for the risk of expropriation. This assumes that the returns of companies with a potential threat of expropriation are conducted by a diffusion process mixed with jumps in the event of financial crisis. This research values the real option of expropriation (call option) in which, at the request of the government, the investor must sell the company (the underlying asset) to the government in exchange for compensation (the strike price). Finally, the developed methodology is applied to the case of Banamex.

INTRODUCCIÓN

Para muchos teóricos de la ciencia económica la propiedad privada de los medios de producción y la obligación del Estado de garantizar la misma son los pilares sobre los cuales se construye el capitalismo moderno. Sin embargo, en momentos de crisis, la expropiación o nacionalización de algunas empresas consideradas estratégicas puede ser una opción "conveniente" o "necesaria", y por supuesto legal, al calor de una coyuntura. Ejemplos de este tipo de hechos han sido las expropiaciones en Venezuela de empresas cafetaleras en 2009 y más recientemente empresas cementeras transnacionales, los ingenios expropiados por el gobierno mexicano durante el sexenio 2000-2006 y los rescates de varios grupos financieros por el gobierno de los Estados Unidos, que mantiene la propiedad de las acciones.[1] Estos actos de autoridad han sido producto de situaciones de crisis y constituyen el último recurso ante problemáticas excepcionales. De no ser así, se trastocarían los incentivos de diversos sectores de la economía. Es generalmente aceptado que un Estado pueda expropiar una empresa cuando *i*) exista un propósito público o social, *ii*) sea calificada por ley, *iii*) sea no discriminatoria y *iv*) se indemnice expeditamente.

Más allá de un análisis axiológico o normativo de las expropiaciones, veladas o expuestas, que se han realizado en los años recientes a lo largo del orbe, este artículo se centra en la determinación del valor de mercado que tienen los títulos de capital de las empresas que están sujetas o que son candidatas a expropiación. En este análisis se añade a la valoración por flujos descontados, la prima por "riesgo de expropiación" que deberían recibir los accionistas.

El tema de los rescates financieros no es, de ninguna manera, nuevo en la biblio-

[1] Es importante destacar que el tema en el que un gobierno mantiene acciones de una empresa extranjera no es, de ninguna manera, nuevo. Por ejemplo, durante 1987-1988 el gobierno de Kuwait tuvo una participación de acciones de la British Petroleum Co plc (BP) de alrededor de 21% de su capital emitido en acciones ordinarias. En 1988, el Secretario de Estado de Industria y Comercio del Reino Unido creó una comisión para que se investigara e informara si Kuwait, con amplios intereses estratégicos y políticos, pudiera ejercer su influencia en apoyo de su propio interés nacional y en detrimento de los intereses de BP y, por tanto, del interés público del Reino Unido. La recomendación de la comisión fue que el gobierno de Kuwait redujera su participación a 10% en un periodo de un año.

grafía especializada en finanzas; varios investigadores se han cuestionado mucho, antes de la cascada de intervenciones gubernamentales posteriores a la crisis de 2008, las consecuencias que los rescates públicos y las expropiaciones tienen en el valor de los activos de las empresas implicadas. Por ejemplo Faccio *et al* (2006) sugieren que las empresas que gozan de relaciones políticas piden más dinero prestado e invierten en proyectos más riesgosos que las que no las tienen. También sugieren que la disposición de los bancos a prestarles a tasas menores a las que corresponden a sus riesgos responde a la "seguridad implícita" proporcionada por el gobierno a rescatar a las empresas privadas con dinero público, lo que crea un problema de riesgo moral que motiva el comportamiento irresponsable de los administradores de las empresas, pero que no son reflejadas por el mercado a menos que se perciba un riesgo inminente. A lo largo de su trabajo, Faccio *et al* aportan pruebas que sugieren que las empresas con relaciones políticas rescatadas aún son ineficientes después del rescate. Asimismo, Verret (2009) afirma que las ineficiencias son provocadas por la interferencia de intereses políticos en el desarrollo del negocio, pues al existir una participación gubernamental de control[2] en el Consejo de Administración, los intereses políticos son argumentos de decisión en la marcha del negocio.

De acuerdo con Verret (2009), actualmente, en el sector bancario existe el temor de que una intervención decidida del gobierno de los Estados Unidos en su administración[3] cause una merma considerable a las utilidades. Esto implica un temor a que el rescate se convierta en una expropiación velada, razón por la que las acciones de algunos de estos bancos han caído abruptamente. La caída ha resultado un tanto más grande pues, al menos en los Estados Unidos, el gobierno no puede ser demandado a menos que, expresamente, éste haya renunciado a su inmunidad, lo que ocasiona que los pequeños inversionistas (carentes de control) estén indefensos ante las acciones del accionista mayoritario y su equipo de dirección, los cuales no comparten el interés de maximización de utilidades.

Una explicación similar a este fenómeno, en la teoría de juegos, es dada por Schneider y Tornell (2004). En su trabajo estos investigadores plantean un juego en el que el comportamiento irresponsable es un equilibrio si, de antemano, se sabe que el gobierno rescatará a las empresas en problemas cuando éstas constituyen una masa crítica superior a un umbral predeterminado, mientras que el comportamiento responsable se transforma en un equilibrio si los agentes económicos pierden su negocio (es expropiado) en caso de quebrar. En el modelo de Schneider y

[2] Existen distintas definiciones de control de una empresa. En las modernas sociedades anónimas, en las que la propiedad está diseminada, es posible encontrar control con 10% de las acciones comunes.

[3] El Presidente de los Estados Unidos ha sugerido que los bancos, con dinero público en su capital, deberán apoyar a los pequeños y medianos negocios. Esto implica asumir un riesgo que no será trasladado por medio de la tasa de interés y por tanto un préstamo a tasas menores que las de mercado.

Tornell las crisis bancarias son producidas por una política irresponsable de endeudamiento (en bienes comerciables). Estos autores establecen que una amenaza creíble de pérdida del negocio, por ejemplo, expropiación, reduce los pagos esperados de los agentes (lo que puede extrapolarse al precio de las acciones) ante una política de endeudamiento irresponsable.

En una línea de investigación similar, Rosas (2006) proporciona un modelo bayesiano para explicar la propensión de un gobierno a rescatar o cerrar una empresa dependiendo de factores como la independencia del banco central, la apertura de la economía (tanto comercial como financiera), la transparencia gubernamental, la concentración bancaria y el origen del capital e incluso el apoyo del Fondo Monetario Internacional (FMI). Rosas concluye que el rescate público o capitalización privada obedece a factores políticos y estructurales (no exclusivamente financieros, como el precio de la indemnización).

En todos los casos es posible suponer que ante una amenaza creíble de pérdida del negocio (en este caso, por expropiación) los precios de las acciones caerán. Este trabajo intenta medir la magnitud de esta caída por medio de la metodología de opciones reales, añadiendo saltos al proceso de difusión de los rendimientos del subyacente y correlacionándolos a estructura de plazo dada por el modelo de Vasicek.

Esta propuesta de investigación va un paso más allá de la metodología tradicional de valoración de opciones reales.[4] Se propone una valoración que surge de la solución del problema de maximización dinámica estocástica de las ganancias de un inversionista, adverso al riesgo y de vida infinita que mantiene en su cartera posiciones largas en un bono libre de riesgo crédito cuya tasa de interés sigue una estructura de plazo dada por el modelo de Vasicek, un activo riesgoso sujeto al "riesgo de propiedad", cuyos rendimientos (correlacionados a la tasa de interés) serán modelados por un movimiento geométrico browniano con saltos y una posición corta respecto a la opción real de compra del activo riesgoso.

Aunque la naturaleza de las opciones reales conlleva, usualmente, al modelado por medio de opciones estadunidenses, el deseo de encontrar soluciones analíticas obliga al uso de opciones europeas como aproximación al valor de sus análogas estadunidense. Al plantear el problema en su versión más sencilla, es posible mostrar la convergencia de una opción estadunidense a una europea cuando se cumple que:

[4] Las opciones reales han cobrado recientemente un gran interés en economía y finanzas; véase por ejemplo, Strobel (2005) y Henderson y Hobson (2002). El principal objetivo asociado con opciones reales es cómo valorar productos derivados de activos no negociables. En esta investigación se evalúa la opción real del riesgo de expropiación como un derivado, puesto que, a petición del gobierno, el inversionista deberá entregarle el activo subyacente a cambio de una indemnización o precio de ejercicio. Se sugiere al lector consultar dos libros clásicos sobre opciones reales: Dixit y Pindyck (1994) y Schwartz y Trigeorgis (2001).

el subyacente no paga dividendos, la tasa de interés libre de riesgo crédito permanece constante, los intervalos de tiempo entre nodos tienden a 0, la media y varianza de los procesos son constantes y las probabilidades neutrales al riesgo permanecen constantes a lo largo de todo el ejercicio (véase más pormenores en, por ejemplo, Barone-Adesi y Whaley, 1987).

Para añadir realismo al ejercicio se resuelve el problema de optimación dinámica estocástica (PODE), planteado líneas arriba, suponiendo que el rendimiento del bono libre de riesgo es conducido por una estructura de plazo formada a partir de la tasa corta del modelo de Vasicek. Por último, se incorpora "estrés financiero" al modelo suponiendo que el activo riesgoso sigue un proceso de difusión con saltos, en el que el salto representa el tiempo de la expropiación y será modelado por medio de una distribución exponencial; asimismo el tamaño de la pérdida será modelado mediante una distribución de valores extremos. Lo anterior permitirá hacer el modelo tratable y calcular el valor de la prima por "riesgo de propiedad".

La inclusión de la estructura de plazo cuando el rendimiento del subyacente sigue un movimiento geométrico browniano no altera mucho la propiedad de convergencia del modelo, pues es posible mostrar, mediante el teorema de Girzanov (véase, por ejemplo, Venegas-Martínez, 2008), que el cambio de numeraria (o numerario) incurrido al modificar la estructura de plazo no altera las probabilidades neutrales al riesgo, las cuales son únicas si se mantiene el supuesto de mercados completos; visto de manera heurística, sólo se monta el árbol binomial en la estructura de plazo.

Infortunadamente, el modelado de situaciones de crisis financieras por medio del proceso de difusión con saltos imposibilita la valoración de la opción real haciendo uso de árboles binomiales, pues la existencia de un salto en cualquier periodo rompe la continuidad del mismo. Este inconveniente es salvado al mostrar que el precio de la opción europea tiene una solución cerrada cuando el tamaño del salto es lognormal; véase, al respecto, Merton (1976). En general, es posible encontrar una solución aproximada a la ecuación diferencial parcial de segundo orden resultante de la optimación usando los métodos Monte Carlo o de diferencias finitas.

Por último, se aplica los conceptos y desarrollos anteriores a la estimación del precio de la acción de Banamex por medio del método de flujos de efectivo descontados y añadiendo a éste el valor de la opción real que es obtenida mediante simulaciones Monte Carlo.

I. Planteamiento del problema

El valor presente esperado, F_t, al momento t, de un proyecto mediante el cálculo de los flujos de efectivo descontados puede ser resumido como:

$$F_t \quad \mathrm{E} \quad {}_{t} \quad {}_{s} e^{\quad u} \mathrm{d}u | \quad {}_{t} \tag{1}$$

en que ${}_s$ representa el flujo de efectivo esperado durante el desarrollo del proyecto en el momento s, es la tasa de descuento apropiada según el sector y grado de apalancamiento del proyecto y ${}_t$ denota toda la información pertinente (disponible) al momento t.

En esta investigación se propone agregar al valor del proyecto, F_t, el valor de la prima por "riesgo de propiedad", el cual se intenta modelar como una opción real. Para justificar esta aproximación se supone la existencia de un inversionista, adverso al riesgo, de vida infinita que tiene acceso a un bono libre de riesgo crédito, B_t, cuyo rendimiento (cambio porcentual) está dado por:

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} \quad r\mathrm{d}t \tag{2}$$

en que r representa la tasa de interés libre de riesgo (de incumplimiento) pagada por el bono. Este agente también tiene también acceso a un activo riesgoso, es decir, el proyecto, F_t, cuyo rendimiento está dado por un proceso de difusión de la forma:

$$\mathrm{d}F_t \quad ({}_F \mathrm{d}t \quad {}_F \mathrm{d}W_{1t}) F_t \tag{3}$$

en la que ${}_F$ es el rendimiento medio esperado del proyecto, ${}_F$ representa la volatilidad instantánea del proyecto y W_{1t} es un movimiento browniano, es decir, W_{1t} $N(0, t)$, en cuyo caso se cumple que $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{1t}] \quad 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_{1t}] \quad \mathrm{d}t$. Es en este punto cuando, de manera natural, surge la necesidad de modelar el valor del "riesgo de propiedad" como un derivado, puesto que, a petición del gobierno, el inversionista deberá venderle el activo riesgoso a cambio de un precio de indemnización, K, el cual, en el peor de los casos, puede ser determinado unilateralmente por el propio gobierno. Obsérvese que lo anterior se trata de la descripción de una posición corta en una opción de compra, ${}_t(F_t, t)$, a la que sólo le falta especificar el plazo de vencimiento y la forma de ejercicio, es decir las condiciones de frontera; ambas características determinan el tipo de opción analizada.

En el caso de las expropiaciones, la naturaleza casi impredecible del momento de ocurrencia del acto de autoridad hace necesaria la modelación por medio de opciones estadunidense, por lo que es posible suponer que la cartera del inversionista está conformado por posiciones largas en un bono, B_t, que paga una tasa libre de riesgo y en el activo riesgoso, F_t, además de una posición corta en una opción de compra de dicho activo, ${}_t$, esto es:

$$_t \quad a_t(\ _1F_t \quad _2\ _t \quad _3B_t) \tag{4}$$

en que $_i$ representa la proporción de riqueza que el inversionista asigna a cada activo en su cartera.

La necesidad de simplificar el problema lleva al supuesto de una única fecha en la cual el gobierno debe decidir si ejerce o no la opción de compra que posee en el activo riesgoso, lo que convierte la opción de compra estadunidense en una europea, la cual resulta, analíticamente, más tratable. Por otra parte, la naturaleza no financiera del subyacente hace necesaria la aplicación de la metodología de opciones reales para su valoración (véase mayor referencia en Abel, 1983; Dixit y Pindyck, 2000, o Trigeorgis, 1996, entre otros).

A grandes rasgos, la metodología de opciones reales está basada en aplicar la tecnología de opciones financieras en proyectos de inversión contingentes cuya realización depende del desempeño de un proyecto principal que hace las veces de subyacente. Con este enfoque, la posición y tipo de opción están determinados por la naturaleza del proyecto analizado, en el caso particular del riesgo de propiedad, tal y como se explicó líneas arriba, se trata de una posición corta en una opción de compra es decir una opción real de cierre.

La naturaleza contingente de la opción, es decir, su naturaleza de derivado, conduce a utilizar el cálculo de Itô en la determinación de la ecuación diferencial estocástica que rige su prima. Aplicando las reglas del cálculo estocástico[5] al rendimiento de la opción europea de compra, se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}}{\ _t} \quad (\quad \mathrm{d}t \quad \mathrm{d}W_{1t}) \tag{5}$$

que no es otra cosa que la ecuación diferencial estocástica (EDE) del rendimiento de la opción real de cierre que modela el "riesgo de propiedad". En este caso se cumple que:

$$\frac{}{\ _t} \quad \frac{}{F_t}\ _F F_t \quad \frac{1}{2}\frac{^2}{F_t^2}\ _F^2 F_t^2 \quad \frac{1}{\ _t} \qquad \text{y} \qquad \frac{}{F_t}\ _F \quad \frac{1}{\ _t}$$

Para completar el planteamiento del problema de optimación dinámica estocástica (PODE), es necesario establecer una función de beneficios que refleje la preferencia creciente a tasas decrecientes por los beneficios que presenta el agente analizado. Para ello se propone una función de beneficios de la forma: $_t(B, F_t, \ _t) \quad _t / \quad _t$, la cual se supone cóncava en concordancia con agentes adverstos al riesgo.

5 Como referencias véase Lamberton y Lapeyre (1996), Mikosch (1998) y Gikhman y Skorokhod (2004).

II. SOLUCIÓN DEL PODE, ESTRUCTTURA DE PLAZOS PLANA Y RENDIMIENTOS BROWNIANOS DEL SUBYACENTE

Una vez obtenidas las ecuaciones diferenciales que modelan los rendimientos de los tres activos a los que tiene acceso el inversionista, se está en posición de modelar la dinámica estocástica del rendimiento de su riqueza, a_t, dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$\mathrm{d}a_t \quad a_t \ {}_1\mathrm{d}F_t \quad a_t \ {}_2\mathrm{d} \ {}_t \quad a_t(1 \ (\ {}_1 \quad {}_2))\,\mathrm{d}B_t \quad {}_t\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

Para determinar la solución del problema, de maximizar (1) sujeto a (6), es necesario establecer las tenencias óptimas de cada uno de los activos a los que tiene acceso el agente, así como el beneficio esperado óptimo.[6] Para ello se tiene que plantear la maximización del valor esperado de los beneficios del inversionista descontados[7] por la tasa apropiada, ,sujeto a la restricción presupuestaria de su riqueza, esto es:

$$\underset{t}{\text{Maximizar}} \quad \mathrm{E} \quad \underset{t}{} \ \frac{t}{}\, e^{\quad u}\mathrm{d}u \,|\ {}_t$$

s. a.

$$\mathrm{d}a_t \quad a_t \ {}_1\mathrm{d}F_t \quad a_t \ {}_2\mathrm{d} \ {}_t \quad a_t(1 \ (\ {}_1 \quad {}_2))\,\mathrm{d}B_t \quad {}_t\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

en que ${}_t$ representa toda la información pertinente disponible hasta el momento *t*. Para resolver este problema (véase, por ejemplo, Chiang, 1992) se recurre a la función de valor

$$J\,(a_t, t) = \underset{t}{\max}\ \mathrm{E} \quad \underset{t}{} \ \frac{t}{}\, e^{\quad u}\mathrm{d}s\,|\ {}_t$$

A partir de la cual se obtiene la siguiente ecuación recursiva:

$$J\,(a_t, t) = \underset{t}{\max}\ \mathrm{E} \quad \underset{t}{\overset{t \quad dt}{}} \ \frac{t}{}\, e^{\quad s}\mathrm{d}s \qquad \underset{t \quad dt}{} \ \frac{t}{}\, e^{\quad s}\mathrm{d}s\,|\ {}_t \tag{8}$$

Después de observar que el segundo sumando dentro de la esperanza es la misma funcional J evaluada un instante después del punto de partida, si se aproxima su valor usando la diferencial de Fréchet y se utiliza el teorema del valor medio de la integral en el primer sumando, se obtiene:

[6] Es necesario recordar que el beneficio es una variable aleatoria dada la naturaleza estocástica de los rendimientos de los activos.

[7] Característicamente se propone como tasa de descuento la WACC (*Weighted Average Capital Cost*) de todos los activos de los cuales obtiene ganancias el inversionista analizado.

$$0 \quad \max_{t,\ 1t,\ 2t} \mathrm{E} \quad \frac{\ \ t}{} e^{\ \ s} \quad J_t \quad J_a a_t \ r \ (\ _F \quad r)\ _{1t} \quad (\quad r)\ _{2t} \quad \frac{\ \ t}{a_t}$$
$$\frac{J_{aa} a_t^2}{2} (\ _F \ _{1t} \qquad _{2t})^2 \ \mathrm{d}t \quad o(\mathrm{d}t) \quad J_a a_t (\ _F \ _1 \qquad _2)\,\mathrm{d}W_{1t} \tag{9}$$

Si se tiene esperanzas, se divide sobre dt y se toma el límite cuando dt tiende a 0, se obtiene que

$$0 \quad \max_{t,\ 1t,\ 2t} \quad \frac{\ \ t}{} e^{\ \ s} \quad J_t \quad J_a a_t \ r \ (\ _F \quad r)\ _{1t} \quad (\quad r)\ _{2t} \quad \frac{\ \ t}{a_t}$$
$$\frac{J_{aa} a_t^2}{2} (\ _F \ _{1t} \qquad _{2t})^2 \tag{10}$$

Ahora bien, se propone como candidato de solución la función separable $J(a_t, t)$ $(a_t / \ )e^{\ \ t}$. Después de realizar algunas sustituciones, se obtiene un hamiltoniano de la forma:

$$0 \quad \max_{t,\ 1t,\ 2t} \quad \frac{\ \ t}{} \qquad \frac{a_t}{} \quad a_t \ r \ (\ _F \quad r)\ _{1t} \quad (\quad r)\ _{2t} \quad \frac{\ \ t}{a_t}$$
$$\frac{a_t(\quad 1)}{2} (\ _F \ _{1t} \qquad _{2t})^2 \tag{11}$$

Derivando esta expresión respecto a cada una de las variables de decisión, $\ _t$, $\ _{1t}$ y $\ _{2t}$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para las condiciones de primer orden (CPO):

$$\begin{aligned}
\frac{H}{\ \ t} \quad & 0: \quad \ _t^{\ \ 1} \quad a_t^{\ \ 1} \quad 0 \\
\frac{H}{\ \ _{1t}} \quad & 0: \quad a_t (\ _F \quad r) \quad a_t (\quad 1)(\ _F \ _{1t} \qquad _{2t}) \ _F \quad 0 \\
\frac{H}{\ \ _{2t}} \quad & 0: \quad a_t (\quad r) \quad a_t (\quad 1)(\ _F \ _{1t} \qquad _{2t}) \quad 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Si se usa las dos últimas ecuaciones es posible determinar que los premios al riesgo de los activos riesgosos de la cartera son idénticos, esto es:

$$\frac{\ _F \quad r}{\ _F} \qquad \frac{\quad r}{}$$

Si se sustituye la media y la varianza del derivado (la opción real), dadas en las ecuaciones (3) y (5), se obtiene la ecuación diferencial parcial de segundo orden de Black-Scholes (1973), a saber:[8]

$$0 \quad \frac{}{t} \quad \frac{}{F} F_t r \quad \frac{1}{2} \frac{{}^{2}}{F^2} F_t^2 \; {}^{2}_{F} \quad r \tag{13}$$

La ecuación anterior modela el riesgo de propiedad. Según los supuestos antes mencionados, las condiciones de frontera de la opción real son: max$[F_T \quad K, 0]$ y ${}_T(0, T) \quad 0$. La solución de (13) está dada por:

$$\begin{gathered} {}_t \quad F_t N(d_1) \quad K e^{\;r(T \quad t)} N(d_2) \\ d_1 \quad \frac{\ln \dfrac{F_t}{K} \qquad r \quad \dfrac{{}^{2}_{F}}{2} \quad (T \quad t)}{{}^{2}_{F}\sqrt{T \quad 1}} \qquad d_2 \quad d_1 \quad \sqrt{T \quad t} \end{gathered} \tag{14}$$

en la que el valor del "riesgo de propiedad", ${}_t$, está expresado como función del valor del proyecto original, F_t, el valor de la indemnización, K, la tasa libre de riesgo de incumplimiento, r, la volatilidad del proyecto original, ${}^{2}_{F}$, y el tiempo que tiene el gobierno para tomar la decisión, $T \quad t$.

Una vez establecida, según los supuestos antes mencionados, la solución de Black-Scholes como una aproximación para el valor del "riesgo de propiedad" que enfrentan los accionistas de una empresa, lo cual representa una posible expropiación, se puede establecer la sensibilidad de este riesgo ante cambios en sus factores incidentes. Tal vez, el más importante de estos factores es la indemnización, K, que deberá pagar el gobierno a los afectados y que puede ser establecida de manera unilateral por él mismo, dependiendo de su poder o urgencia.

Haciendo una analogía con las opciones financieras, es viable visualizar la *cappa*, $(\;)/ \; K$, como una medida del cambio en el valor de la prima recibida ante un cambio en la indemnización que el gobierno debe otorgar a los accionistas. Se puede demostrar que $\quad 0$ para posiciones largas en las opciones de compra, por lo que resulta lógico que para una posición corta se tenga que $\quad 0$, pues esto aumenta la probabilidad de conservar la prima. Para interpretar este resultado, el análisis se remite a la ecuación (4), en la cual se acompaña de un signo positivo a la proporción de la riqueza destinada a la opción real, lo que implica que conforme la indemnización aumenta es más probable que el accionista conserve el valor de la prima al resultar menos atractiva la "nacionalización". Por tanto, es creíble suponer que la caída observada en los precios de mercado ante el anuncio de una expropiación será menor si se fija un mayor valor de indemnización, .

[8] Véase Venegas-Martínez (2008) o Neftci (2000).

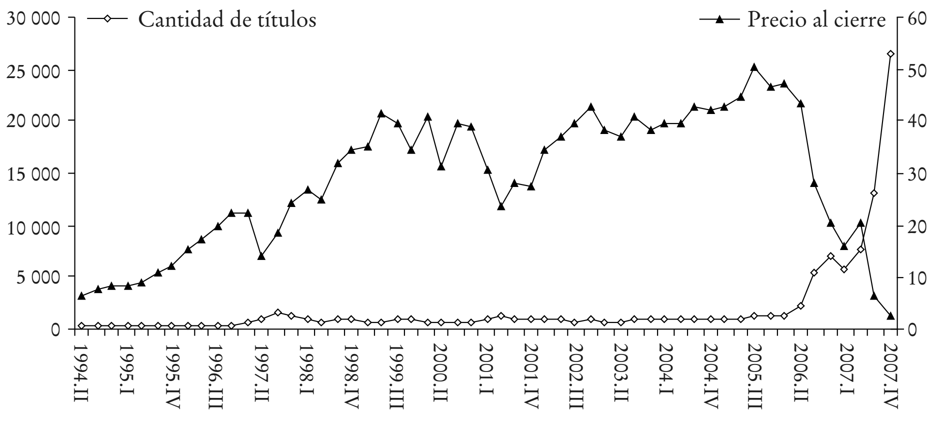
Otro factor por considerar es la volatilidad del subyacente, es decir, del proyecto original, la cual se representa mediante $(\ )/\ _F$. De nuevo, se muestra una relación positiva entre la volatilidad del proyecto original, $_F$, y el valor de la opción en una posición larga, $(\ )$, esto es, 0. Invirtiendo el signo, dada la posición corta en la cartera analizada, se tiene que: 0, lo que implica que a mayor volatilidad en el negocio aumentan los incentivos del gobierno para controlar la empresa, lo que incrementa la probabilidad de ejercicio de la opción real, lo que producirá un efecto negativo en el valor de las acciones en el mercado, lo que mina la riqueza del accionista.

En la gráfica 1 se muestra tanto los volúmenes (eje principal) como los precios de cierre, ajustados por dividendos en moneda original, de la acción ordinaria de Citigroup Inc. al cierre de cada trimestre de 1994.II-2009.I (eje secundario). En estas series es posible verificar el aumento del número de transacciones y la caída del precio de la acción ante altas volatilidades en el negocio principal y el anuncio del gobierno de una posible nacionalización de la empresa.[9]

Resulta importante hacer notar que la solución a la ecuación (13) está dada por la conocida fórmula de Black-Scholes, la cual es válida si se tiene con una estructura de plazos plana, mercados completos, divisibilidad perfecta del subyacente y normalidad en la distribución de los rendimientos del activo subyacente. A lo largo de este trabajo se flexibilizarán el primer y el último supuestos.

GRÁFICA 1. *Volumen comerciado y precio de cierre trimestral de la acción de Citigroup en la Bolsa de Valores de Nueva York*

(Millones)



FUENTE: *Economática*.

[9] Aunque de manera velada, la inyección de recursos públicos a Citigroup Inc. constituyó una expropiación del negocio con una indemnización de tal magnitud que impulsó el precio de la acción.

III. Solución del PODE con tasa corta de Vasicek y rendimientos brownianos del subyacente

El siguiente paso en la extensión del modelado del valor del "riesgo de propiedad" es suponer una estructura de plazo no plana, lo que *de facto* representa un premio por liquidez y produce mayor realismo. Para ello se utiliza una tasa corta similar a la especificada por Vasicek (1977). En el modelo propuesto se supone que los procesos de difusión, tanto de la tasa de interés, dW_{1t}, como de los activos riesgosos, dW_{2t}, son distintos aunque correlacionados. Este supuesto es una generalización de los establecidos en Mossin (1966), Sharpe (1964) y Treynor (1962), en los que se da una relación entre la tasa libre de riesgo (con una estructura de plazo plana) y el rendimiento de los activos riesgosos está dado por el conocido modelo CAPM.

Las relaciones antes descritas están representadas al suponer que la tasa corta es conducida por la EDE de Vasicek, a saber:

$$\frac{dB}{B} \quad dr_t \quad (b \quad r_t)\,dt \quad {}_B\,dW_{2t} \tag{15}$$

en la que representa la velocidad de ajuste de la tasa corta, r_t, hacia la tasa de largo plazo, b, y ${}_b$ es la volatilidad de la tasa corta. Por otra parte, la EDE que rige el rendimiento del activo riesgoso se basa en la ecuación (3). Como consecuencia de esto, la EDE que conduce los rendimientos de la opción real que modela el "riesgo de propiedad" está dada por la ecuación (5).

El problema de optimación dinámica estocástica que el agente tiene que resolver es similar al planteado en la ecuación (7), excepto por la restricción presupuestaria, lo cual conduce a:

$$0 \quad \max_{t,\ 1t,\ 2t}$$

$$\mathrm{E}\left[\begin{array}{l} \frac{t}{}\,e^{\ s} \quad J_t \quad J_a a_t \quad (b \quad r_t) \quad ({}_F \quad (b \quad r_t))\ {}_{1t} \quad (\quad (b \quad r_t))\ {}_{2t} \quad \frac{t}{a_t} \\ \frac{J_{aa} a_t^2}{2} \quad {}^2_B(1 \quad {}_1 \quad {}_2)^2 \quad ({}_F\ {}_{1t} \quad {}_{2t})^2 \quad 2 \quad {}_B(1 \quad {}_1 \quad {}_2)({}_F\ {}_{1t} \quad {}_{2t}) \\ o(dt) \quad J_a a_t(({}_F \quad)\,dW_{1t} \quad {}_B(1 \quad {}_1 \quad {}_2)\,dW_{2t}) \end{array}\right] dt \tag{16}$$

Como ante, es necesario tomar la esperanza de la ecuación (16), dividirla entre dt, y tomar el límite cuando dt tiende a 0, de lo que se obtiene:

$$0 \quad \max_{t,\ 1t,\ 2t}$$

$$\begin{array}{l} \frac{t}{}\,e^{\ s} \quad J_t \quad J_a a_t \quad (b \quad r_t) \quad ({}_F \quad (b \quad r_t))\ {}_{1t} \quad (\quad (b \quad r_t))\ {}_{2t} \quad \frac{t}{a_t} \\ \frac{J_{aa} a_t^2}{2} \quad {}^2_B(1 \quad {}_1 \quad {}_2)^2 \quad ({}_F\ {}_{1t} \quad {}_{2t})^2 \quad 2 \quad {}_B(1 \quad {}_1 \quad {}_2)({}_F\ {}_{1t} \quad {}_{2t}) \end{array} \tag{17}$$

De nuevo, se requiere proponer un candidato de solución de la forma $J(a,t)$ $(a_t / \ ) e^{\ \ t}$ a fin de determinar la ecuación diferencial parcial de segundo orden que rige a . Posteriormente se obtiene sus derivadas parciales y se sustituyen en (17) para obtener el hamiltoniano, a saber:

$$
\begin{aligned}
0 \quad \frac{\ t}{\ } \quad \frac{a_t}{\ } \quad a_t \quad (b \quad r_t) \quad (\ _F \quad (b \quad r_t))\ _{1t} \quad (\quad (b \quad r_t))\ _{2t} \quad \frac{\ t}{a_t} \\
\frac{(\ \ 1)\ a_t}{2}(\ _B^2(1 \quad _1 \quad _2)^2 \quad (\ _F\ _{1t} \quad _{2t})^2 \quad 2 \quad _B(1 \quad _1 \quad _2)(\ _F\ _{1t} \quad _{2t}))
\end{aligned}
\tag{18}
$$

A partir de este hamiltoniano es posible obtener las condiciones de primer orden (condiciones necesarias) derivándolo respecto a las variables cuyo óptimo se desea obtener, a saber:

$$
\begin{aligned}
&\frac{H}{\ t} \quad 0: \quad _t^{\ \ 1} \quad a_t^{\ \ 1} \quad 0 \\
&\frac{H}{\ _{1t}} \quad 0: \quad \begin{array}{l} a_t(\ _F \quad (b \quad r_t)) \quad \dfrac{a_t(\ \ 1)}{2}(\ 2\ _B^2(1 \quad _1 \quad \ _F\ _{1t} \quad _{2t})\ _F) \\ \dfrac{a_t(\ \ 1)}{2}(2 \quad _B((1 \quad _1 \quad _2)\ _F \quad (\ _F\ _{1t} \quad _{2t}))) \quad 0 \end{array} \\
&\frac{H}{\ _{2t}} \quad 0: \quad \begin{array}{l} a_t(\quad (b \quad r_t)) \quad \dfrac{a_t(\ \ 1)}{2}(\ 2\ _B^2(1 \quad _1 \quad \ _F\ _{1t} \quad _{2t}) \quad) \\ \dfrac{a_t(\ \ 1)}{2}(2 \quad _B((1 \quad _1 \quad _2) \quad (\ _F\ _{1t} \quad _{2t}))) \quad 0 \end{array}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

El primer resultado importante de esta extensión, es la corroboración débil del teorema de separación de Fisher; véase, al respecto, Fisher (1930). Lo que de hecho significa que la política de pago de dividendos, como proporción de la riqueza, es independiente de la política de inversión de la empresa, siempre que las tasas pasivas sean iguales a las activas para plazos iguales y posibilidades irrestrictas de inversión. Se dice que la corroboración es débil, pues el valor de en términos de las proporciones de riqueza asignada a cada activo, las cuales cambian ante modificaciones en la restricción presupuestaria, permanecen constantes. Esta afirmación responde a la igualdad entre las primeras ecuaciones de las CPO de los dos PODE a pesar de los cambios en la tasa libre de riesgo, la inclusión de una nueva fuente de incertidumbre en el problema y la consecuente alteración de la trayectoria de la riqueza del individuo.

El segundo resultado importante de este ejercicio está dado por la igualación de las dos últimas CPO, de manera que los premios al riesgo de ambos activos sean iguales, esto es:

$$\frac{(\ _F \quad (b \quad r_t)) \quad (1 \quad) \ _B^2(1 \quad _1 \quad _2) \quad _B(\ _F \ _{1t} \quad _{2t})}{_F}$$

$$(1 \quad)(\ _F \ _1 \quad _2 \quad _B(1 \quad _1 \quad _2)) \qquad (20)$$

$$\frac{(\quad (b \quad r_t)) \quad (1 \quad) \ _B^2(1 \quad _1 \quad _2) \quad _B(\ _F \ _{1t} \quad _{2t})}{\quad}$$

$$(1 \quad)(\ _F \ _1 \quad _2 \quad _B(1 \quad _1 \quad _2))$$

lo que a su vez puede ser reescrito como

$$\frac{_F \quad (b \quad r_t)}{_F} \qquad \frac{(b \quad r_t)}{\quad}$$

en que $(1 \quad) \ _B^2(1 \quad _1 \quad _2) \quad _B(\ _F \ _{1t} \quad _{2t})$. La igualdad anterior puede ser llevada a una ecuación diferencial parcial de segundo orden. En efecto, después de sustituir y en la ecuación anterior, se tiene que:

$$\frac{}{t} \quad \frac{1}{2}\frac{^2}{F_t^2}F_t^2 \ _F^2 \quad \frac{}{F_t}F_t \quad (b \quad r_t) \qquad (b \quad r_t) \quad \frac{}{F_t}F_t \qquad 0 \qquad (21)$$

en que $(b \quad r_t)$ es la parte determinista (tendencia) de la tasa corta y $(\quad / \ F_t)F_t$ se agrega como respuesta a la nueva fuente de incertidumbre aportada por la tasa corta especificada en la ecuación (15). Este resultado implica que la opción real que modela el "riesgo de propiedad" está más allá de la fórmula de Black-Scholes, a causa de los dos últimos sumandos. Para su solución siempre es posible recurrir a métodos numéricos o al método de simulación Monte Carlo.

Si se desea conocer las proporciones óptimas de riqueza asignada a cada activo, es necesario partir del sistema de ecuaciones expresado en (20) y denotar

$$_i \quad \frac{_i \quad (b \quad r_t)}{_i}$$

como el premio al riesgo (de mercado) pagado a cada activo riesgoso, de lo cual se obtiene, por igualación:

$$_F \quad \frac{1}{_F}(\ _B^2 \quad _B^2 \ _1 \quad _B^2 \ _2 \quad _F \ _1 \quad _F \ _2)$$

$$\frac{1}{\quad}(\ _B^2 \quad _B^2 \ _1 \quad _B^2 \ _2 \quad _F \ _1 \quad _F \ _2) \qquad (22)$$

del que se obtiene

$$_1 \quad \frac{(\ _F \quad)\ _F}{(\ ^2_B \quad _F)(1 \quad)(\quad\quad _F)} \quad _2(\ ^2_B \quad)\ ^2_B$$

Si se sustituye la expresión anterior en (20) y si se denota

$$\frac{(\ _F \quad)\ _F}{(\ ^2_B \quad _F)(1 \quad)(\quad\quad _F)}$$

se obtiene que:

$$_2 \quad \frac{\frac{_F}{1} \quad\quad _B \frac{^2_B}{_F} \quad ^2_B \frac{^2_B \quad _F \quad 1}{_F} \quad\quad _F \quad _B \quad _B}{(\ ^2_B \quad _F \quad 1) \frac{^2_B}{_F} \quad _B \quad (\ ^2_B \quad)(\ _F \ 1) \quad\quad 1 \ \frac{1}{_F}}$$

El valor de $_1$ puede ser obtenido sustituyendo $_2$ en la cualquiera de las ecuaciones del sistema dado en (20).

IV. SOLUCIÓN DEL PODE CON TASA CORTA DE VASICEK Y RENDIMIENTOS CORRELACIONADOS CON SALTOS

Para la última etapa del análisis teórico del trabajo se supondrá un entorno de crisis financiera, en el cual los rendimientos de la compañía, sujeta a expropiación, pueden sufrir saltos abruptos que están fuera del poder explicativo de los procesos de difusión meramente brownianos, lo cual se excluye del alcance de la metodología tradicional de opciones reales.

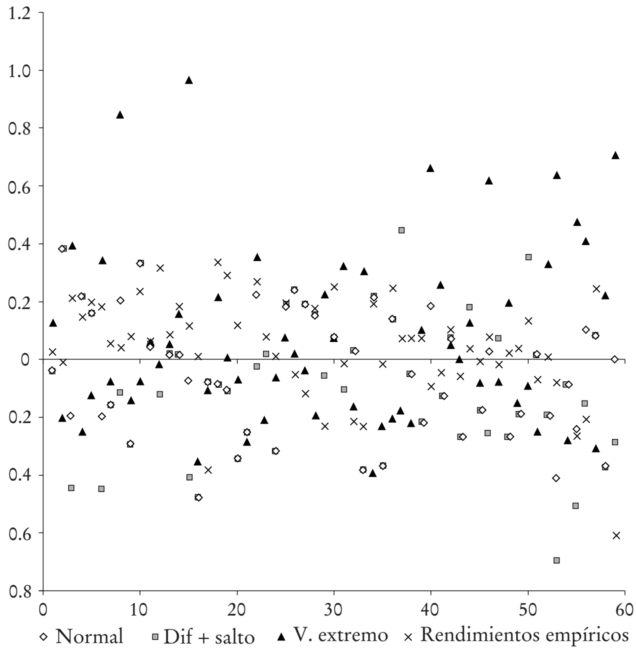
La presencia de estos saltos será modelada mediante una distribución de Poisson con intensidad y tamaño promedio del salto igual a , lo cual permitirá la existencia de rendimientos "extremos" que están más allá de lo pronosticado por una distribución normal, es decir, más allá del supuesto de un proceso de difusión browniana.

Antes de iniciar con el planteamiento del problema de optimación dinámica estocástica (PODE), se mostrará empíricamente la validez del modelado usado. En la siguiente gráfica se presenta un conjunto de rendimientos trimestrales, 1994.III-2009.I, de la acción de Citigroup Inc. junto a un grupo de rendimientos simulados suponiendo difusión browniana, difusión con saltos y rendimientos de valores extremos[10] (Gumbell).

Se observa que los rendimientos trimestrales son explicados casi en su totalidad por un proceso de difusión browniano, marcado por rombos, el cual fue planteado

[10] Los algoritmos de simulación están a disposición de los lectores interesados a vuelta de correo.

GRÁFICA 2. *Rendimientos reales y simulados por varios métodos de acción de Citigroup en la Bolsa de Valores de Nueva York*

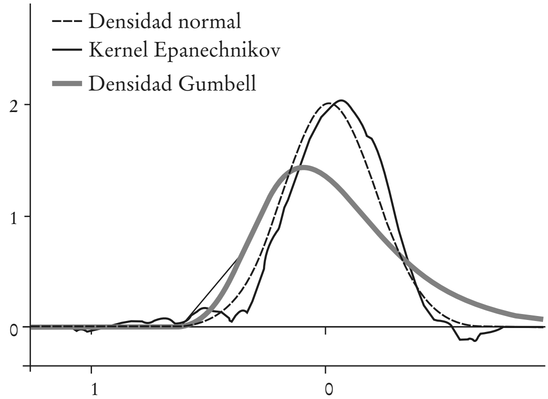


usando como insumos la media y varianza muestral de los rendimientos reales,con cruces. Las únicas observaciones reales fuera del alcance de esta simulación son los correspondientes a los dos últimos trimestres de 2009, los cuales coinciden con periodos de crisis financiera y el anuncio de una posible estatización.

Aunque es sabido que los rendimientos de baja frecuencia (por ejemplo, trimestrales), se distribuyen como variables aleatorias normales, resulta interesante observar que ante condiciones de crisis financiera los rendimientos presentan saltos que no pueden ser explicados por la distribución normal. Ante la evidencia empírica se ha simulado un grupo de rendimientos regidos por un proceso de difusión con saltos cuyo umbral de salto está dado por la probabilidad de una variable aleatoria basada en una distribución Poisson que sólo puede presentar un salto por periodo. En este caso, se obtiene el tamaño promedio del salto como el promedio de los excesos de los rendimientos, es decir, rendimientos por encima de dos desviaciones estándar, de una distribución normal, lo cual coincide con lo que tradicionalmente se considera un exceso después del VAR, esto es un rendimiento anormal.

El proceso de difusión con saltos resultante de este ejercicio, marcado con cuadros, copia al proceso de difusión browniana en todos los puntos excepto en los

GRÁFICA 3. *Ajuste de los rendimientos de la acción de Citigroup en la Bolsa de Valores de Nueva York, mediante distribuciones normal y Gumbell, además de un Kernel Epanechnikov*



FUENTE: *Economática*.

que una variable aleatoria independiente superó la probabilidad de ocurrencia del salto, lo que genera con ello los movimientos extremos de la muestra. Como se observa en la gráfica 2 el proceso de difusión con saltos copia el número de excesos en la normal presente en la muestra, de lo cual se puede concluir que el ejercicio numérico presentado copia, en promedio, el proceso estocástico original, y que por tanto la valoración numérica de la opción real de un activo cuyos rendimientos (con saltos) están correlacionados a la tasa de interés es, en promedio, apropiada.

Por último, se muestra, marcados con triángulos, los rendimientos generados a través de una función de valores extremos, Gumbell, cuyos parámetros de ubicación y escala fueron determinados usando el programa *Xtremes* 3.01 en su versión académica. Este programa también mostró la casi perfecta normalidad de los rendimientos, con excepción de los dos últimos, y el ajuste de las distribuciones normal y Gumbell en los datos. Todo esto es mostrado en la gráfica 3.

Ante esta evidencia empírica y algunas simulaciones, aun cuando los datos son trimestrales,[11] es válido iniciar con el planteamiento del PODE cuando el subyacente se basa en un proceso de difusión con saltos. El planteamiento de este problema es similar a los anteriores; el único cambio que se hará está dado por la ecuación diferencial estocástica seguida por los rendimientos del activo riesgoso ante una crisis, a saber:

11 Aunque el uso de la optimación dinámica estocástica implica continuidad en el proceso, se ha tomado datos trimestrales por ser la frecuencia de aparición de los estados financieros usados en la valoración. La discretización fue meramente ilustrativa.

$$dF_t \quad (\ _F \mathrm{d}t \quad _F \,\mathrm{d}W_{1t} \quad \mathrm{d}N_t)F_t \tag{23}$$

en la que se ha agregado al proceso de difusión en (3) un proceso de salto de Poisson, dN_t, que en promedio salta una vez en el instante con una probabilidad (proporcional a) la intensidad promedio , por lo que la probabilidad de que no ocurra algún salto está dada por 1 $\mathrm{d}t \quad o(\mathrm{d}t)$, y la probabilidad de más de un salto por unidad de tiempo está dada por $(\mathrm{d}t)$

La inclusión de este nuevo elemento responde a la necesidad de modelar el cambio abrupto en los rendimientos de la empresa provocados por el rumor de la intervención gubernamental. En general, éste es intempestivo y sus efectos pueden ser, dada la periodicidad trimestral, englobados en un solo hecho, lo cual coincide plenamente con el modelado mediante saltos de Poisson. En este caso, es posible demostrar que este infinitésimo de orden superior al primero tiende a 0 conforme el intervalo analizado se colapsa al mismo punto, esto es:

$$\lim_{\mathrm{d}t \quad 0} \frac{o(\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t} \quad 0$$

Del mismo modo, es posible demostrar que $\mathrm{E}[\mathrm{d}N_t] \quad \mathrm{Var}[\mathrm{d}N_t] \quad dt.$

Usando las reglas del cálculo (estocástico) de Itô para obtener la ecuación diferencial estocástica[12] que rige al derivado, se obtiene que:

$$\mathrm{d} \ (F_t, t) \quad (\ \mathrm{d}t \quad \mathrm{d}W_{1t}) \ _t \quad (\ _t(F_t(1 \quad), t) \quad _t(F_t, t))\,\mathrm{d}N_t \tag{24}$$

en la que y están dadas como en (5), mientras que la ecuación diferencial estocástica que rige la tasa corta aún es la expresada en (15), es decir, el modelo de Vasicek (1977).

La ecuación anterior refleja la inclusión del proceso de Poisson (salto) en la ecuación diferencial que rige los rendimientos de la opción real, por medio de la cual se modela el riesgo por expropiación. En general, está opción carece de valor (se encuentra profundamente fuera del dinero), excepto en los momentos que un rumor creíble de la nacionalización "activa" el componente de salto, $\mathrm{d}N_t$, y la lleva a niveles donde su existencia afecta el valor de la cartera implícita[13] de los accionistas.

Nuevamente, en el planteamiento del problema los cambios hechos en las ecuaciones que rigen los rendimientos del activo riesgoso y del derivado serán notorios

[12] La notación diferencial es un abuso de notación, en realidad se trata de ecuaciones integro-diferenciales.

[13] En la bibliografía de valoración de activos con opciones reales se establece que un proyecto cualquiera tiene inmersa una serie de opciones reales (expansión, cierre, postergación, etc.), que afectan el valor del proyecto. En su conjunto, el proyecto puede ser visto como una cartera con un activo riesgoso (el proyecto) y una serie de opciones respecto a la misma.

hasta obtener la diferencial de la funcional, d$J\,(a_t, t)$. La razón de este cambio es la inclusión de la restricción (que incluye la opción "activa" que modela el riesgo de propiedad) en la búsqueda del óptimo. Para resolver el problema de que se trata, se tiene que:

$$0 \quad \max_{t,\ 1t,\ 2t}$$

$$\mathrm{E}\quad \begin{array}{l} \frac{t}{}e \quad ^{s} \quad J_t \quad J_a a_t \quad (b \quad r_t) \ \ (\ _F \quad (b \quad r_t))\ _{1t} \quad (\quad (b \quad r_t))\ _{2t} \quad \frac{t}{a_t} \qquad \mathrm{d}t \quad o(\mathrm{d}t) \\ \frac{J_{aa} a_t^2}{2} \quad {}^2_B(1 \quad _1 \quad _2)^2 \quad (\ _F \ _{1t} \quad _{2t})^2 \quad 2 \quad _B(1 \quad _1 \quad _2)(\ _F \ _{1t} \quad _{2t}) \\ o\,(dt) \quad J_a a_t((\ _F \qquad) dW_{1t} \quad _B(1 \quad _1 \quad _2)\, dW_{2t}) \\ J_a a_t(\ _{1t} \quad (\ (F_t(1 \quad), t) \quad (F_t, t))\ _{2t})\mathrm{d}N_t \end{array}$$

(25)

De nuevo, es necesario tomar la esperanza de la expresión anterior y tomar su límite cuando el intervalo analizado colapsa a 0, de lo que se obtiene:

$$0 \quad \max_{t,\ 1t,\ 2t}$$

$$\begin{array}{l} \frac{t}{}e \quad ^{s} \quad J_t \quad J_a a_t \quad (b \quad r_t) \ \ (\ _F \quad (b \quad r_t))\ _{1t} \quad (\quad (b \quad r_t))\ _{2t} \quad (\ _{2t} \quad _{1t}) \ \frac{t}{a_t} \\ \frac{J_{aa} a_t^2}{2} \quad {}^2_B(1 \quad _1 \quad _2)^2 \quad (\ _F \ _{1t} \quad _{2t})^2 \quad 2 \quad _B(1 \quad _1 \quad _2)(\ _F \ _{1t} \quad _{2t})) \end{array} \tag{26}$$

Obsérvese que la expresión anterior difiere de su análoga del PODE anterior únicamente en el valor promedio del salto, $(\ _{2t} \quad _{1t})$, el cual es agregado a la esperanza de la derivada parcial respecto a la riqueza de la funcional, $J \quad (a_t, t)$. En efecto, el tamaño promedio del salto del valor del activo en riesgo de expropiación afecta la riqueza promedio del inversionista en $J_a a_t \ (\ _{2t} \quad _{1t})$ unidades, no así su varianza, lo que modifica su restricción presupuestaria y, por tanto, su conjunto asequible de ganancias.

Al proceder con la solución del PODE, es necesario establecer como candidato de solución, $J\,(a_t, t) \quad (a_t / \ )e \ ^{t}$, para (26). Dado que la función objetivo permanece inalterada en los tres planteamientos, es posible usar el mismo candidato a solución para todos ellos, de lo que se obtiene el siguiente hamiltoniano, en el que únicamente la media de la riqueza fue alterada:

$$\begin{array}{l} 0 \quad \frac{t}{} \quad \frac{a_t}{} \quad a_t \quad (b \quad r_t) \ \ (\ _F \quad (b \quad r_t))\ _{1t} \quad (\quad (b \quad r_t))\ _{2t} \quad (\ _{1t} \quad _{2t}) \ \frac{t}{a_t} \\ \frac{(\quad 1) \ \ a_t}{2}(\ {}^2_B(1 \quad _1 \quad _2)^2 \quad (\ _F \ _{1t} \quad _{2t})^2 \quad 2 \quad _B(1 \quad _1 \quad _2)(\ _F \ _{1t} \quad _{2t})) \end{array} \tag{27}$$

Después de tomar las derivadas parciales del hamiltoniano respecto a cada una de las variables de control, se obtiene el siguiente sistema de condiciones necesarias:

$$
\begin{aligned}
&\frac{H}{\ _t} \quad 0: \quad {}_t^{\ 1} \quad a_t^{\ 1} \quad 0\\
&\frac{H}{\ _{1t}} \quad 0: \quad \begin{array}{l} a_t(\ _F \quad (b \quad r_t) \quad) \quad \dfrac{a_t(\quad 1)}{2}(\ 2\ {}_B^2(1 \quad {}_1 \qquad {}_F\ {}_{1t} \qquad {}_{2t})\ {}_F) \\ \dfrac{a_t(\quad 1)}{2}(2 \quad {}_B((1 \quad {}_1 \quad {}_2)\ {}_F \quad (\ _F\ {}_{1t} \qquad {}_{2t}))) \quad 0 \end{array} \qquad (28)\\
&\frac{H}{\ _{2t}} \quad 0: \quad \begin{array}{l} a_t(\qquad (b \quad r_t) \quad) \quad \dfrac{a_t(\quad 1)}{2}(\ 2\ {}_B^2(1 \quad {}_1 \qquad {}_F\ {}_{1t} \qquad {}_{2t}) \quad) \\ \dfrac{a_t(\quad 1)}{2}(2 \quad {}_B((1 \quad {}_1 \quad {}_2) \qquad (\ _F\ {}_{1t} \qquad {}_{2t}))) \quad 0 \end{array}
\end{aligned}
$$

Al igual que en los dos planteamientos de las secciones anteriores, es posible observar que la trayectoria óptima esperada del reparto de dividendos, dada por la primera derivada parcial, permanece sin cambio, a saber: $\ _t \quad {}^{1/(\quad 1)}a_t$, lo que corrobora de nuevo el cumplimiento débil del teorema de Fisher.

Adviértase que la inclusión de un salto de Poisson correlacionado con los rendimientos del activo únicamente afecta las proporciones óptimas de opciones y subyacente, $\ _1$ y $\ _2$, que el inversionista debe mantener en su cartera, no así sus ganancias. Esta solución redunda en que, ante un momento de incertidumbre provocada por el anuncio de una posible expropiación, el inversionista cambia la proporción de cobertura delta del activo riesgoso. El monto y dirección de este cambio será resultado de la percepción del mercado de la expropiación, es decir, del valor del salto, .

Ahora sólo resta encontrar la ecuación diferencial parcial de segundo orden que rige el precio del derivado necesario para cubrir el riesgo por propiedad en los supuestos explicados en el PODE resuelto líneas arriba. En efecto, al igualar las parciales del hamiltoniano respecto a las proporciones óptimas, $\ _{1t}$ y $\ _{2t}$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\ _F \quad (b \quad r_t)) \qquad (1 \quad)\ {}_B^2(1 \quad {}_1 \quad {}_2) \qquad {}_B(\ _F\ {}_{1t} \qquad {}_{2t})}{\ _F}\\
&\qquad (1 \quad)(\ _F\ {}_1 \qquad {}_2 \qquad {}_B(1 \quad {}_1 \quad {}_2)) \qquad (29)\\
&\frac{(\qquad (b \quad r_t)) \qquad (1 \quad)\ {}_B^2(1 \quad {}_1 \quad {}_2) \qquad {}_B(\ _F\ {}_{1t} \qquad {}_{2t})}{}\\
&\qquad (1 \quad)(\ _F\ {}_1 \qquad {}_2 \qquad {}_B(1 \quad {}_1 \quad {}_2))
\end{aligned}
$$

Lo anterior implica que el premio al riesgo de la opción real y del subyacente son, como en los ejercicios anteriores, iguales. En este caso, el premio al riesgo es afectado tanto por las volatilidades de los activos incluidos en la cartera como por la correlación de la tasa corta con el riesgo de expropiación asociado al subyacente, . Después de igualar las ecuaciones anteriores, y sustituir y , se obtiene una ecuación diferencial parcial de segundo orden similar a la obtenida en los PODE anteriores, esto es:

$$\frac{}{t}\quad \frac{1}{2}\frac{^{2}}{F_t^2}F_t^2\,{}^{2}_{F}\quad \frac{}{F_t}F_t\ (b\quad r_t)\qquad (b\quad r_t)\ \frac{}{F_t}F_t \tag{30}$$

en la que $(1\quad {}_B(1\quad {}_1\quad {}_2)\quad {}_B(\ {}_F\ {}_{1t}\quad {}_{2t})$. Como puede constatarse en la expresión anterior, la nueva ecuación diferencial parcial (EDP) incorpora el valor promedio del salto, , manteniendo la forma tradicional de las EDP seguidas por los derivados.

También es necesario hacer notar que la EDP producto del ejercicio de optimación anterior es no lineal y su solución queda fuera del alcance de la propuesta por Black y Scholes. Del mismo modo, su solución queda fuera del alcance de los métodos tradicionalmente usados en la valoración de opciones reales, pues la presencia de saltos imposibilita el uso de árboles recombinantes.

Es importante advertir que hasta el momento, sólo se ha hablado del valor promedio del tamaño del salto, , sin señalar la distribución de éste. Se ha dejado de lado este tema de manera intencional, pues existen casos específicos que arrojan soluciones cerradas, por ejemplo, si el tamaño del salto se distribuye como una variable aleatoria log-normal, Merton (1976) encuentra que la solución a la ecuación diferencial parcial parabólica está dada por:

$$C_{jd}\quad {}_{n\ 0}\ \frac{e^{(1\quad)T\ 1)}(\ (1\quad)(T\quad t)^{n})}{n!}C_{BS}(S,X,r_n,\ {}^{2}_{n},T\quad t) \tag{31}$$

en la que es el parámetro de intensidad del proceso de saltos, $C_{BS}(\ )$ representa el valor de una opción de compra de Black-Scholes, denota la media de la distribución del tamaño del salto, X es el precio de ejercicio, ${}^{2}_{n}\quad {}^{2}\quad (n\ {}^{2})/(T\quad t)$, significa la volatilidad del subyacente y $r_n\quad r\quad (n\ln(l\quad))/(T\quad t)$. Véase pormenores en Venegas-Martínez (2008).

Esta solución particular para el problema planteado por (30) representa el valor de la prima por riesgo de expropiación. Se recomienda tomar esta aproximación con cautela pues la naturaleza del fenómeno estudiado implica la posibilidad de valores extremos en el tamaño del salto.

La solución del la EDP, de esta sección, es la base de la valoración de los activos de Citigroup en México, pues se supone que los rendimientos de la acción (global) están correlacionados con la tasa de interés libre de riesgo de los Estados Unidos y que su rendimiento estaba afectado por el anuncio de la intención del gobierno estadunidense de convertirse en el principal accionista de la empresa. En la gráfica 1 se observa caídas importantes en el precio (junto a un aumento en el volumen) de la acción, a la vez que se anunciaba la nacionalización del banco con una indemnización mínima (o nula) para los inversionistas. La siguiente sección replica el ejercicio teórico anterior para datos de la filial mexicana.

V. Valoración de los activos de Citigroup (México) (antes Banamex)

Una vez establecida la teoría, y demostrado que las opciones reales por riesgo de propiedad satisface la ecuación parcial de segundo orden que deben cumplir todos los derivados, se hace una aplicación práctica de estos resultados con los activos de Citigroup en México (antes Banamex). Estos activos pudieran ser sujetos a una recompra por parte del gobierno mexicano dadas algunas dudas de la legalidad de la propiedad del banco por parte de un gobierno extranjero.

El primer paso del ejercicio consiste en obtener una serie de flujos de efectivo de Banamex después de que fuera vendido a Citigroup, estos datos son públicos y fueron obtenidos de la página de la CNBV.[14] Usando los estados de resultados y saldo general, trimestrales, de Banamex, fue posible construir una serie de tiempo de flujos de efectivo a partir del tercer trimestre de 2002 (3T02) y hasta el tercer trimestre de 2008 (3T08). Estos flujos fueron tratados como una serie de tiempo la cual fue sujeta a pruebas ADF y KPSS de estacionariedad, para después ajustar en ellas un sencillo ARMA(1,1). Las pruebas son mostradas en el cuadro 1.

Este tratamiento resulta conceptualmente similar al uso de estados financieros proforma para estimar flujos de efectivo futuros, pues al igual que estos, el ARMA(1,1) mantiene la estructura de generación del proceso a lo largo del análisis[15] e incorpora la posibilidad de innovaciones que, en teoría, se distribuyen como variables aleatorias normales.

Una vez comprobado que los errores y sus cuadrados no muestran autocorrelación,[16] se realizó un pronóstico hasta el tercer trimestre de 2014 (3T14) y se supuso una tasa de crecimiento fina de 3% a partir de ese punto.

[14] Al respecto, consultar la página web http://www.cnbv.gob.mx/default.asp?com_id=2 .

[15] En los estados proforma se busca mantener las proporciones de las variables clave a lo largo de todo el ejercicio respecto a una que se toma como "pivote", generalmente las ventas y activos del último año.

[16] Las pruebas están a disposición de los lectores interesados por correo electrónico.

CUADRO 1. *Pruebas de estacionariedad de la serie de flujos de efectivo de Banamex (3T02-3T08)*

Hipótesis nula: SRDCBANAMEX tiene raíz unitaria; exógena: costante; tamaño de rezago: 0 (automático basado en SIC, MAXLAG = 5)

		Estadístico t	*Probab.*[a]
Estadístico de prueba ADF		4.382187	0.0023
Valores críticos	1%	3.737853	
	5%	2.991878	
	10%	2.635542	

Hipótesis nula: SRDCFBANAMEX es estacionaria; exógena: constante; ancho de banda: 1 (Newey-West usando núcleo de Bartlett)

		Estadístico L. M.
Estadístico de prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin		0.113523
Valores críticos asintóticos[b]	Nivel 1%	0.739000
	Nivel 5%	0.463000
	Nivel 10%	0.347000
Varianza residual (sin corrección)		9.95E 13
Varianza corregida HAC (núcleo de Bartlett)		6.41E 13

[a] MacKinnon (1996) valores *p* de una cola.
[b] Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992), tabla 1.

CUADRO 2. *Ajuste de un ARMA (1,1) a la serie de flujos de efectrivo de Banamex*

Variable dependiente: SRDCFBANAMEX; método: mínimos cuadrados; fecha: 07/08/09, hora: 22:26; muestra (ajustada): 2002T4 2008T3; observaciones incluidas: 24 después de ajustes; convergencia alcanzada después de 9 iteraciones

	Coeficiente	*Error estándar*	*Estadístico t*	*Prob.*
AR(1)	0.977039	0.21281	45.91069	0.0000
MA(1)	0.996825	0.105844	9.417858	0.0000

R^2	0.028690	Media de la variable dependiente	5918815.
R^2 ajustada	0.075448	D. E. de la variable dependiente	7948887.
S.E. de la regresión	8243300.	Criterio de información de Akaike	34.76736
Suma de residuales al cuadrado	1.49E+15	Criterio de Schwarz	34.86553
Log verosimilitud	415.2083	Criterio de Hannan-Quinn	34.79340
Estadístico Durbin-Watson	1.768416		

Para el descuento de estos flujos de efectivo estimados, y la perpetuidad creciente posterior al pronóstico, se construyó una WACC con el supuesto de que el negocio es fondeado principalmente en los Estados Unidos, sede de la matriz, por lo que se calculó el rendimiento del capital de Citigroup usando un año (252 observaciones diarias) de observaciones de rendimientos, tanto del mercado como de la tasa libre y del título de la compañía, esto es, se usó el CAPM.

También se usaron la tasa impositiva efectiva (14%), es decir, impuestos pagados como proporción del EBIT, y tasa de interés pagada efectiva de la compañía (7.06%) para obtener la WACC, que resulta en una tasa anualizada de 5.7%. Esta tasa resulta sorprendente hasta que se analiza que la tasa de rendimiento resultado del CAPM es de .05%, ante una beta[17] de 2.43 y un premio al riesgo, $r_m \quad r_j$, de 0.03978, producto de los rendimientos negativos del mercado en el año anterior al cierre del 3T08. Una vez obtenido el valor presente de todo el negocio de Citigroup en México, se dividió entre el número de acciones del corporativo estadunidense, lo que arroja un valor de 26.33 pesos mexicanos por acción. El fondeo y las decisiones corporativas son tomadas en la matriz estadunidense, dado que todos los accionistas del Citigroup son copropietarios de Banamex. El resultado anterior sugiere que del valor total de las acciones de Citigroup, 26 pesos son aportados por Banamex. Este valor teórico es el punto de partida, F_t, para el cálculo del valor de las opciones.

Tal y como se estableció líneas arriba, el cálculo del valor de las opciones fue realizado, por simplificación, mediante el método de simulación Monte Carlo ejecutado en una macro de Excel ©[18]. Los algoritmos fueron relegados a un apéndice por simplificación en la exposición.

Se iniciará en análisis con el modelo más sencilla explicado en el trabajo, el cual supone que los rendimientos del subyacente son conducidos por un browniano con tendencia y la tasa de interés está fija en todo momento. Todo lo anterior implica que este ejercicio no es otra cosa que la valoración de una opción de compra de Black-Scholes por medio del método Monte Carlo, por lo que su resultado servirá para calibrar el algoritmo contra un resultado conocido.

Los demás parámetros están dados por los valores de mercado de la acción de Citigroup (C) en el mercado estadunidense, a saber: una tasa libre de riesgo de 3%, una volatilidad anual de los rendimientos del subyacente de 4% y un horizonte de un año. La gráfica 4 muestra los valores de la opción a distintos precios de ejercicio.

En este ejercicio es posible observar que de tener un precio de ejercicio igual al precio teórico del subyacente, la opción es valorado en 0.94 pesos, lo que puede ser entendido como un sobreprecio implícito por una amenaza creíble de expropiación según los supuestos explicados en la sección II del trabajo.

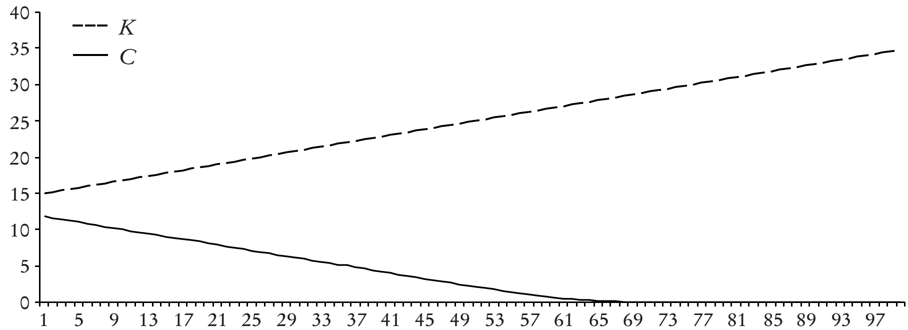
Con esta primera aproximación en mano, es posible realizar el mismo ejercicio suponiendo que la tasa de interés usada para la valoración está regida por el proceso

[17] Su cálculo también fue hecho con un año de observaciones y está a disposición del lector interesado.

[18] Los algoritmos están a disposición del lector interesado vía correo electrónico.

GRÁFICA 4. *A Cambio en el valor de la opción de compra (B&S) ante cambios en el precio de ejercicio*[a]

(Dólares)



[a] Precio del *call* a diferentes precios de ejercicio, St 23.33, r 0.3, .043675, t 1.

CUADRO 3. *Regresión para la estimación del modelo de tasa corta de Vasicek, datos diarios del pagaré de la tesorería*

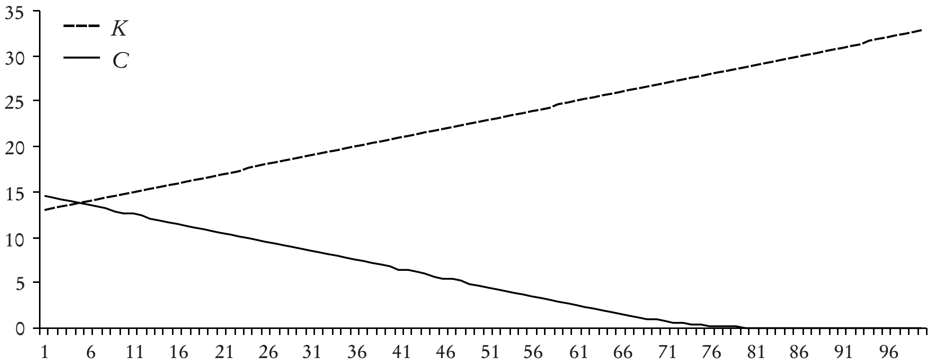
Variable dependiente: SR_TBILL10; método: mínimos cuadrados; fecha: 07/09/09, hora: 18:30; muestra (ajustada): 10/01/2007, 9/17/2008; observaciones incluidas: 253 después de ajustes: SR_TBILL10 C(1) C(2)*SR_TBILL10(1)

	Coeficiente	*Error estándar*	*Estadístico* t	*Prob.*
C(1)	0.000952	0.000639	1.491014	0.1372
C(2)	.976405	0.016287	59.95114	0.0000
R^2		0.934723	Media de la variable dependiente	0.039128
R^2 ajustada		0.934463	D. E. de la variable dependiente	0.002990
S.E. de la regresión		0.000765	Criterio de información de Akaike	11.50466
Suma cuadrada de residuales		0.000147	Criterio de Schwarz	11.47672
Log verosimilitud		1457.339	Criterio de Hannan-Quinn	11.49342
Estadístico F		3594.139	Estadístico Durbin-Watson	2.126232
Probabilidad (estadístico F)		0.000000		

dado por el modelo de tasa corta de Vasicek, a saber, la ecuación (15). Lo que implica que la opción de compra debe satisfacer la ecuación (21) que resulta de las condiciones de primer orden del problema. Para la aplicación del modelo fue necesario realizar una regresión lineal, AR(1), de la tasa de interés del mercado estadunidense, en específico el pagaré de la Tesorería de 10 años por ser la tasa libre de referencia para proyectos de largo plazo; a continuación se muestra la regresión estimada, la cual está basada en el modelo teórico, esto es:

$$\begin{aligned} r_t &\quad b\,\mathrm{d}t \quad ar_{t \quad 1}\,\mathrm{d}t \quad {}_{B}\,\mathrm{d}W_{2t} \\ r_t &\quad A \quad Br_{t \quad 1} \quad V \end{aligned} \tag{32}$$

GRÁFICA 5. *Cambio en el valor de la opción de compra ante cambios en el precio de ejercicio*[a]
(Dólares)



[a] Se supone que la tasa corta de interés es regida por un proceso como por el descrito por Vasicek, además de que el rendimiento del subyacente está dado por un proceso de difusión. Precio del *call* a diferentes precios de ejercicio, St 26.33, r .033, r .03, .043675, T 1.

en la que $V \square N(0, S\ _2)$. Los resultados de la regresión se presentan en el cuadro 3. Para convertir los resultados de la regresión en datos útiles para el modelo continuo, es necesario realizar las siguientes transformaciones:

$$b \quad \frac{A}{B}, a \quad \frac{\ln(1 \quad B)}{\mathrm{d}t}, s_e \quad \frac{s\sqrt{\frac{2\ln(1 \quad B)}{\mathrm{d}t}}}{\sqrt{(1 \quad B)^2 \quad 1}} \tag{33}$$

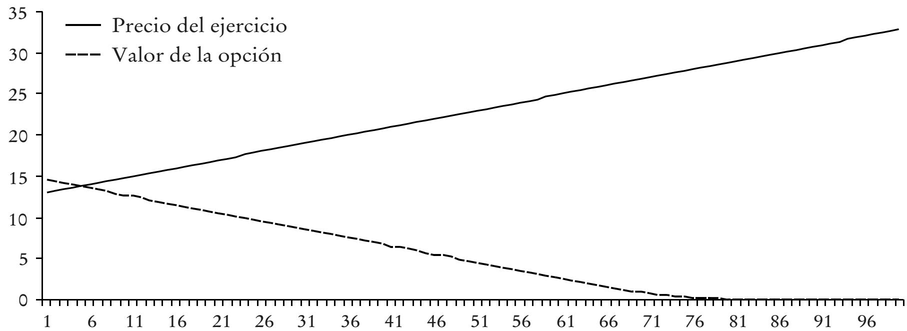
A continuación se muestran diferentes valores de la opción cuando el precio de ejercicio es modificado; los demás parámetros permanecen iguales que en el ejercicio anterior.

Un resultado importante de este ejercicio es el aumento del valor de la prima para todos los puntos, arrojando un valor de 1.15 pesos para una opción cuyo precio de ejercicio es similar al precio teórico al momento de la valoración. De nuevo, este valor es el sobreprecio a pagar por la amenaza creíble de expropiación.

Por último, se realizará el mismo ejercicio suponiendo la presencia de saltos en el proceso de difusión de los rendimientos del subyacente. Para ello se hizo uso del programa *Xtremes* 3.01™ para conocer la media, varianza y umbral de salto de los rendimientos diarios de un año (3T07–3T08) del subyacente. Para realizar los cálculos, se supuso que los saltos están dados por una función de distribución exponencial, la función de la familia de Pareto relacionada con la distribución Gumbell. Los resultados de las simulaciones para distintos precios de ejercicio se muestra en la gráfica 6.

GRÁFICA 6. *Cambio en el valor de la opción de compra ante cambios en el precio de ejercicio*[a]

(Dólares)



[a] Se supone que la tasa corta de interés es regida por un proceso como por el descrito por Vasicek, además de que el rendimiento del subyacente está dado por un proceso de difusión con salto. Precio del *call* a diferentes precios de ejercicio, St 26.33, r .033, r .03, .043675, T 1, media de salto .12723.

La gráfica 6 muestra que la caída en el precio de la opción es más rápida que en los casos anteriores, dada la media negativa del salto. Este resultado obedece a la menor disposición del gobierno a pagar una indemnización alta por una empresa en problemas, lo que es un resultado compatible con la investigación de Rosas (2006). Una alta indemnización también aleja la posibilidad de que el gobierno se apropie de la empresa y la use con fines "políticos", pues hace más oneroso el proceso, por lo que el resultado también es compatible con el trabajo de Verret (2009).

En el cuadro 4 se presenta un resumen de los valores teóricos de la aportación de los activos de Banamex en el valor de la acción de Citigroup a diferentes periodos, en todos los casos, se tomó una perpetuidad después de 25 trimestres en el futuro. En la perpetuidad se tomó como valor fijo el último flujo de efectivo, el cual es descontado con la misma tasa que el resto de los flujos.

Las valoraciones anteriores son congruentes con las estimaciones del propio grupo financiero.[19] En ellas se dice que Banamex aporta, aproximadamente, el 10% de las utilidades de Citigroup, por lo que parece lógico que su aportación sea un porcentaje similar en el valor de la acción.

Parte del ejercicio teórico de este trabajo es valorar el precio de la incertidumbre asociada con la expropiación; para ello se comparan los precios de las opciones reales con los tres panoramas analizados en el trabajo, a saber: proceso de difusión

[19] "Banamex no está a la venta": Zorrilla, *El economista*, 16 de febrero de 2009, Notimex. "Banamex insiste que no está a la venta", *Diario Hispano Mexicano*, 2 de marzo de 2009 (http://www.diariocritico.com/mexico/2009/Marzo/noticias/133409/banamex-insiste-en-que-no-esta-a-la-venta.html).

CUADRO 4

Periodo	*Valor de acción de Citi (dólares)*	*TC FIX a cierre de trimestre (pesos)*	*VPS de Banamex (perp trim 25) (pesos)*	*VPS de Banamex en (perp trim 25) (dólares)*
2002.III	23.44743	10.2299	56.140380	5.487872
2002.IV	27.96425	10.4393	55.977389	5.362178
2003.I	27.53109	10.7889	56.435213	5.230859
2003.II	34.37926	10.4370	56.476340	5.411166
2003.III	36.84116	11.0133	56.574569	5.136932
2003.IV	39.58513	11.2372	55.186225	4.911030
2004.I	42.50754	11.1748	50.776491	4.543839
2004.II	38.55052	11.5258	50.692015	4.398134
2004.III	36.91212	11.3884	48.687320	4.275168
2004.IV	40.67907	11.1495	48.135218	4.317253
2005.I	38.28255	11.1783	46.723449	4.179835
2005.II	39.75321	10.7752	46.399095	4.306101
2005.III	39.53455	10.7907	42.819303	3.968167
2005.IV	42.55988	10.6344	39.522883	3.716513
2006.I	41.86256	10.8935	36.579003	3.357874
2006.II	42.76664	11.2723	36.016749	3.195155
2006.III	44.47255	10.9935	35.224436	3.204115
2006.IV	50.36425	10.8116	34.153502	3.158968
2007.I	46.88112	11.0322	32.185715	2.917434
2007.II	47.30591	10.7946	34.045830	3.153969
2007.III	43.54670	10.9315	33.408049	3.056127
2007.IV	27.82844	10.9157	32.353284	2.963922
2008.I	20.48255	10.6482	28.409403	2.668001
2008.II	16.23205	10.3069	27.774234	2.694722
2008.III	20.20770	10.9814	26.995213	2.458267

CUADRO 5

Pesos mexicanos al tercer trimestre de 2009				*Dólares al tercer trimestre de 2009*			
	Difusión simple (B&S)	*Difusion y Vasicek*	*Difusion con salto*		*Difusión simple (B&S)*	*Difusion y Vasicek*	*Difusion con salto*
13	14.346	15.236	11.650	1.184	1.306	1.387	1.061
14	13.375	14.223	10.646	1.275	1.218	1.295	0.969
15	12.390	13.219	9.614	1.366	1.128	1.204	0.875
16	11.435	12.218	8.632	1.457	1.041	1.113	0.786
17	10.459	11.228	7.715	1.548	0.952	1.022	0.703
18	9.471	10.240	6.639	1.639	0.862	0.932	0.605
19	8.565	9.234	5.652	1.730	0.780	0.841	0.515
20	7.596	8.226	4.707	1.821	0.692	0.749	0.429
21	6.584	7.210	3.610	1.912	0.600	0.657	0.329
22	5.655	6.247	2.661	2.003	0.515	0.569	0.242
23	4.710	5.257	1.690	2.094	0.429	0.479	0.154
24	3.690	4.227	0.854	2.186	0.336	0.385	0.078
25	2.674	3.231	0.329	2.277	0.243	0.294	0.030
26	1.780	2.230	0.086	2.368	0.162	0.203	0.008

sencillo y estructura de plazo plana, proceso de difusión sencillo correlacionado con una estructura de plazo Vasicek y un proceso de difusión con saltos correlacionado con la mima estructura de plazo, todo ello a diferentes precios de ejercicio. Esto se presenta en el cuadro 5. En este cuadro es posible observar que el agregar una estructura de plazo dada por el modelo de Vasicek redunda en un aumento de la volatilidad de la opción y por tanto en un pequeño aumento en su precio, mientras que la inclusión del salto (negativo) provoca una caída considerable en el precio de la opción dada la inclusión de la caída abrupta en el precio del subyacente.

Conclusiones

A lo largo de este ejercicio se ha mostrado que aun cuando se supone una tasa de interés no plana, en este caso Vasicek, o saltos en el proceso de difusión de los rendimientos del subyacente, la opción de compra debe de cumplir con la ecuación diferencial parcial parabólica de los derivados. También se puso en evidencia que estas ecuaciones, y por tanto sus soluciones, están asociadas a procesos de optimación dinámica estocástica del problema del consumidor sujeto a una restricción presupuestaria que incluye una opción. Asimismo, se mostró que el valor de los títulos de capital de empresas que están en amenaza de expropiación puede ser modelado mediante la técnica de opciones reales (o técnicas basadas en esta metodología como en este caso) y que su instrumentación no está restringida a los supuestos estándar de Black y Scholes.

Para ejemplificar los avances teóricos se ha evaluado a Banamex después de ser integrado a Citigroup en 2001. Al analizar el comportamiento de las opciones, es posible observar que la inclusión de la tasa corta en el proceso aumenta el valor de la opción, a causa de la adición de una nueva fuente de incertidumbre, puede o no estar correlacionada, y de un cambio en la tendencia. En momentos de gran incertidumbre como la presente en el periodo analizado (3T07-3T08), la volatilidad de ambos proceso tiene un gran efecto en el precio de la opción.

Por último, la inclusión de los saltos refleja la crisis financiera producto de la amenaza de expropiación, aunque el modelo permite saltos en ambas direcciones. Un análisis más pormenorizado de saltos mixtos queda para futuras investigaciones. También falta el análisis de estos modelos cuando la tasa de interés sigue procesos distintos del de Vasicek.

Referencias bibliográficas

Barone-Adesi, G., y R. E. Whaley (1987), "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *Journal of Finance*, vol. 42, núm. 2, pp. 301-320.

Chiang, A. (2000), *Elements of Dynamic Optimization*, Nueva York, Waveland Press.

Dixit, A. K., y R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton, Princeton University Press.

——, y —— (1995), "The Options Approach to Capital Investment", *Harvard Business Review*, mayo-junio.

——, y —— (2000), *Expandability, Reversibility, and Optimal Capacity Choice, Project Flexibility, Agency, and Competition, New Developments in the Theory and Applications of Real Options*, Brennan & Trigeorgis, Oxford University Press.

Faccio, M., R. Masulis y J. J. McConnell (2006), "Political Connections and Corporate Bailouts", *Journal of Finance*, vol. 61, núm. 6, pp. 2597-2635.

Fisher, I. (1930), "The Theory of Interest: As determined by Impatience to Spend Income and Opportunity to Invest it", reimpresión 1954, Nueva York, Kelley and Millman.

Gikhman, I. I, A. Skorokhod y S. Kotz (2004), *The Theory of Stochastic Processes* I, Berlín.

Girsanov, I.V. (1960), "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures", *Journal of Theory of Probability and its Applications*, vol. 5, pp. 285-301.

Henderson, V., y D. G. Hobson (2002), "Real Options with Constant Relative Risk Aversion", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 27, núm. 2, pp. 329-355.

Lamberton, D., y B. Lapeyre (1996), *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall Eds.

Merton, R. C. (1976), "Options Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, vol. 3, núm. 2, pp. 125 -144.

Mikosch, T. (1998), *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing.

Mossin, J. (1966), "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, vol. 34, núm. 4, pp. 768-783.

Neftci, S. N. (2000), *An introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Nueva York, Academic Press.

Rosas, G. (2006), "Bagehot or Bailout? An Analysis of Government Responses to Banking Crises", *American Journal of Political Science*, vol. 50, núm. 1, pp. 175-191.

Schwartz, E. S., y L. Trigeorgis (2001), *Real Options and Investment under Uncertainty*, Massachusetts-Londres, The MIT Press Cambridge.

Schneider, M., y A. Tornell (2004), "Balance Sheet Effects, Bailout Guarantees and Financial Crises", *The Review of Economic Studies*, vol. 71, núm. 3, pp. 883-913.

Sharpe, W. F. (1964), "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, vol. 19, núm. 3. pp. 425-442.

Strobel, F. (2005), "Monetary Integration and Inflation Preferences: A Real Options Analysis", *European Economic Review*, vol. 49, núm. 4, pp. 845-860.

Treynor, J. L. (1962), "Toward a Theory of Market Value of Risky Assets", inédito.

Trigeorgis, L. (1996), *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press.
Vasicek, O. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, vol. 5, núm. 2, pp. 177-188.
Venegas-Martínez, F. (2008), *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, 2da. edición, México, Cengage Learning (anteriormente Thomson).
Verret, J. W. (2009), "Treasury Inc.: How the Bailout Reshapes Corporate Theory & Practice" (http://ssrn.com/abstract=1461143).
Villalón, J. (1991), *Matemáticas de las decisiones financieras y sus aplicaciones*, tomo I, España, Ed. Centro de Estudios Ramón Areces, S. A.

Página *web* consultada
(http://www.cnbv.gob.mx/default.asp?com_id=2).