

# VALUACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS SOBRE AMX-L, WALMEX-V Y GMEXICO-B

## Calibración de parámetros de volatilidad estocástica con funciones cuadráticas de pérdida\*

*Ambrosio Ortiz-Ramírez,  
Francisco Venegas-Martínez  
y Mario Durán-Bustamante\*\**

### RESUMEN

Esta investigación propone una metodología para estimar los parámetros del modelo de volatilidad estocástica de Heston (1993) por medio de funciones cuadráticas de pérdida, las cuales minimizan el error entre precios de mercado y precios teóricos. Para ello se plantean tres clases de funciones de pérdida, de las cuales dos están asociadas a precios y otra a volatilidades implícitas. La metodología propuesta se aplica a un conjunto de precios de opciones sobre AMX-L, WALMEX-V y GMEXICO-B. Los resultados indican que para opciones de compra sobre AMX-L se generan volatilidades implícitas consistentes con las observadas con base en el criterio de la raíz de la pérdida del error cuadrático medio, mientras que para opciones de compra sobre WALMEX-V y GMEXICO-B se generan volatilidades implícitas consistentes con las observadas con base en el criterio de la raíz de la pérdida relativa del error cuadrático medio.

\* *Palabras clave:* opciones financieras, volatilidad estocástica, modelos de calibración, estimación de parámetros. *Clasificación JEL:* C8, G13, G17. Artículo recibido el 3 de junio de 2013 y aceptado el 15 de enero de 2014.

\*\* Profesores-investigadores de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional (IPN) (correos electrónicos: amortiz@ipn.mx, fvenegas1111@yahoo.com.mx y mario.d.bustamante@gmail.com).

## ABSTRACT

This paper proposes a methodology to estimate the parameters of the stochastic volatility model from Heston (1993) through quadratic loss functions, which minimize the error between market prices and theoretical prices. To do this, three classes of loss functions are stated, two of which correspond to prices and the other one to implied volatilities. The proposed methodology is applied to a set of option prices on AMX-L, WALMEX-V, and GMEXICO-B. The results indicate that for call options on AMX-L the generated implied volatilities are consistent with observed data under the criterion of the root of the mean quadratic error, while for call options on WALMEX-V and GMEXICO-B the generated implied volatilities are consistent with observed data under the criterion of the root of the mean quadratic relative error.

## INTRODUCCIÓN

A pesar de su popularidad entre practicantes e investigadores, el modelo de Black, Scholes y Merton (BSM) refleja sólo una pequeña parte de la complejidad de los mercados de derivados, produciendo un sesgo persistente en la determinación de las primas de las opciones. De hecho, el supuesto de volatilidad constante es una de las limitantes más drásticas por su contraste con las sonrisas de volatilidad (*volatility smile*) y las muecas de volatilidad (*smirk*) implícitas en los precios de opciones que se negocian en los mercados de derivados.

En las últimas décadas, la investigación ha sido pródiga debido a los cientos de contribuciones que descansan en supuestos más realistas que los del modelo de BSM. Al respecto, se han propuesto muchos y diversos modelos, algunos muy sofisticados, que suponen diferentes procesos estocásticos para conducir la dinámica de los activos subyacentes y su correspondiente prima de riesgo; véase, al respecto, Gatheral (2006). No obstante, un inconveniente de estos modelos es que pocas veces ofrecen fórmulas cerradas. Así, la ventaja de contar con supuestos más realistas se compensa con una implementación y calibración más compleja. Entre dichos modelos alternativos, se encuentran los de volatilidad estocástica (VE). En este enfoque la volatilidad cambia en el tiempo de acuerdo con un proceso estocástico, usualmente especificado mediante una ecuación diferencial estocástica que acompaña la dinámica del precio del activo subyacente.

Los trabajos seminales de Hull y White (1987), Stein y Stein (1991) y Heston (1993) motivaron, sin duda, el desarrollo de los modelos de volatilidad estocástica; estos modelos tienen dos factores, y uno de ellos conduce la dinámica estocástica de la volatilidad. Dentro de este enfoque se han propuesto diferentes modelos para el proceso de volatilidad, particularmente los procesos con reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck, como en Schöbel y Zhu (1999), que suponen dos movimientos brownianos correlacionados y obtienen la función característica del logaritmo del precio con una expresión compuesta por un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas. Asimismo, Zhu (2010) propone un modelo de volatilidad estocástica de doble raíz en el contexto Longstaff (1989). Para resumir, en el cuadro 1, se muestra un resumen de modelos de volatilidad estocástica de dos factores.

CUADRO 1. *Resumen de modelos de volatilidad estocástica de dos factores*

<i>Modelo</i>	<i>Autor</i>
$dv_t = \kappa v dt + \sigma dW_t$	Johnson/Shano (1987)
$d \ln v_t = \kappa(\theta - \ln v) dt + \sigma dW_t$	Wiggins (1987)
$dv_t^2 = \kappa v^2 dt + \sigma v^2 dW_t$	Hull/White (1987)
$dv_t^2 = (a + \beta v_t^2) dt + \sigma \sqrt{v_t^2} dW_t$	Hull/White (1988)
$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \delta) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t} + dZ_t$	Bates (1996)
$dv_t^2 = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}$	
$dv_t = \kappa(\theta - v) dt + \sigma dW_t$	Stein/Stein (1991) Schöbel/Zhu (1999)
$dv_t^2 = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t$	Heston (1993)
$dv_t^2 = \kappa(\theta - v_t^2) dt + \sigma v_t^{3/2} dW_t$	Lewis (2000)
$dv_t^2 = \kappa(\theta - \sqrt{v_t} - \lambda v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t$	Zhu (2010)

FUENTE: elaboración propia.

Es importante destacar otros modelos de volatilidad estocástica que consideran saltos en la dinámica del subyacente, como son los de Bates (1996) y Bakshi, Cao, y Chen (1997). Estos modelos son una extensión con volatilidad estocástica del modelo de difusión con saltos de Merton (1976). Evi-

dentemente, la lista en el cuadro 1 no es exhaustiva; lo realmente interesante en esta lista es cómo elegir uno u otro modelo con base en criterios de ajuste con los precios de mercado. En conclusión, muchos de estos modelos de valuación de opciones se definen por lo general mediante dos procesos: uno para el precio del activo subyacente y otro para la dinámica de la volatilidad, y lo importante es cuál de ellos se ajusta mejor a un conjunto de datos.<sup>1</sup>

Es importante mencionar que el modelo de Heston (1993) ha sido objeto de varias críticas, una de ellas es la dificultad de estimar sus parámetros para calibrar *smiles* de corto plazo. El presente trabajo propone una metodología para la estimación de los parámetros del modelo de Heston mediante funciones de pérdida cuadráticas. La metodología consiste en minimizar una medida del error entre los precios observados y los precios teóricos. Para ello, se utiliza la transformada fundamental de Lewis (2000) y, posteriormente, se desarrolla un algoritmo de calibración que minimiza el error, dado un conjunto de parámetros iniciales asociado a la transformada de Lewis. La metodología se aplica a la valuación de opciones europeas sobre acciones de América Móvil, S.A.B. de C.V., serie L (AMX-L), Wal-Mart de México, S.A.B. de C.V., serie V (WALMEX-V) y Grupo México, S.A.B. de C.V., serie B (GMEXICO-B), que se negocian en el MexDer (Mercado Mexicano de Derivados).

Este trabajo está organizado como sigue: en la primera sección se plantea el marco general de los modelos de volatilidad estocástica; en la segunda se discuten, brevemente, las características teóricas del modelo de Heston junto con su función de densidad marginal para diferentes valores de los parámetros de correlación y volatilidad de la varianza; en el transcurso de la tercera sección se presenta la transformada fundamental de Lewis (2000) y la fórmula general para calcular el precio de una opción bajo una clase general de modelos de volatilidad estocástica; a través de la cuarta sección se desarrolla la metodología de calibración de parámetros del modelo de Heston con funciones cuadráticas de pérdida, el algoritmo de calibración propuesto minimiza el error dado un conjunto de parámetros iniciales asociado a la transformada de Lewis; en la quinta sección se presentan y analizan los resultados obtenidos después de aplicar la metodología para valorar opciones sobre acciones de AMX-L, WALMEX-V y GMEXICO-B; por último, se presentan las conclusiones.

<sup>1</sup> Varios modelos de volatilidad estocástica y su estimación econométrica puede consultarse en Shephard (2005).

## I. EL MARCO TEÓRICO DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

Los modelos de volatilidad estocástica con sus respectivas extensiones, en general, han resultado ser más apropiados, con cierta reserva, para la valuación de opciones en tiempo continuo que otras alternativas con volatilidad constante. Usualmente, estos modelos son planteados en tiempo continuo aunque también se encuentran en la bibliografía en tiempo discreto mediante modelos GARCH y sus extensiones, como se hace en Harvey, Ruiz y Shepard (1994). Un modelo general de volatilidad estocástica es comúnmente planteado como un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t \\dv_t &= \alpha(v_t) dt + \beta(v_t) dW_t^v\end{aligned}$$

Para generar el efecto de apalancamiento se supone que el rendimiento de activo y las innovaciones de la volatilidad están correlacionadas de tal forma que:

$$E(dW_t dW_t^v) = \rho dt$$

De esta manera el precio del derivado depende ahora del tiempo, del precio del activo subyacente y de la volatilidad:

$$P_t = P(t, S_t, v_t)$$

Cuando se considera volatilidad estocástica se relajan dos de los supuestos del modelo de Black, Scholes y Merton; el primero es que un solo movimiento browniano genera incertidumbre (riesgo de mercado) y el segundo, relacionado con el anterior, es que los mercados son completos. Los modelos de volatilidad estocástica consideran, en general, dos movimientos brownianos, y es por ello que el precio del derivado no se puede replicar, por lo que el mercado no es completo. Esto significa que existe un número infinito de precios que invalidan el supuesto de no arbitraje. Si se incluye otro instrumento de cobertura con un derivado, entonces el mercado es completo y, en consecuencia, los derivados ahora deberán valuarse relacionando unos con otros, así como el activo subyacente. Ésta es una de las razones de que los modelos de volatilidad estocástica se puedan calibrar dado un conjunto de precios de mercado de las opciones, es decir, dado un conjunto de pará-

metros iniciales y mediante la implementación de un algoritmo numérico se pueden estimar los parámetros del modelo, minimizando la distancia entre los precios de mercado y los obtenidos con el modelo teórico.

Para modelar el riesgo de volatilidad es común introducir otro movimiento browniano  $\tilde{W}_t$  que representa la parte de  $W_t^v$  que es ortogonal a  $W_t$ , por lo que se puede escribir  $W_t = \rho W_t^v + \sqrt{1-\rho^2} \tilde{W}_t$ . En este caso, el activo subyacente no depende de  $\tilde{W}_t$  y, por lo tanto, el riesgo generado por este browniano no está incluido en el precio del activo. Por otro lado, el riesgo de  $W_t$  está incrustado en la prima de riesgo  $\mu_t - r_t$ . En consecuencia, un inversionista podría ser adverso al riesgo y, aunque su aversión no se observa en el mercado del activo subyacente, aparecerá en el mercado de opciones, ya que estos contratos dependen implícitamente de  $v_t$ . Así, mediante un derivado se puede identificar la prima de riesgo, y entonces se pueden obtener precios de otros derivados.

## II. MODELO DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA DE HESTON

Heston (1993) valúa una opción sobre una acción con volatilidad estocástica, y un rasgo relevante de su trabajo es que obtiene las funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo como soluciones de una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Posteriormente, por medio de estas probabilidades neutrales al riesgo obtiene una fórmula similar a la de Black, Scholes y Merton para valorar una opción europea de compra; el precio de la opción de venta se puede obtener con la paridad *put-call*.

Otra característica esencial del modelo de Heston (1993) es que proporciona una fórmula cerrada (en términos de integrales de variables complejas) para el precio de una opción con el supuesto de correlación entre el precio del activo subyacente y su volatilidad. Aunque la fórmula es cerrada, su cálculo es usualmente complicado por incluir variables complejas. Así, el precio de la opción se obtiene al calcular la probabilidad de que una opción de compra expire dentro del dinero; aunque dicha probabilidad no se puede calcular directamente, ésta se puede calcular a través de la inversión de la función característica del logaritmo del precio del subyacente. A continuación se plantea la dinámica estocástica que conduce la volatilidad. Supongamos que el precio actual,  $S_t$  de una acción es conducido por:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}$$

donde  $\mu$  es el parámetro de tendencia y  $W_{1,t}$  es un proceso de Wiener. La volatilidad  $\sqrt{v_t}$  es conducida por el proceso:

$$d\sqrt{v_t} = -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_{2,t}$$

donde  $W_{2,t}$  es un proceso de Wiener correlacionado con  $W_{1,t}$ , *i.e.*,  $\text{Cov}(dW_{1,t}, dW_{2,t}) = \rho$ . Para simplificar el modelo, se aplica el lema de Itô con el fin de obtener el proceso para la varianza  $v_t$ , el cual se puede expresar como un proceso del tipo Cox, Ingersoll y Ross (1985), es decir,

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{2,t} \tag{1}$$

En el contexto de los modelos de volatilidad estocástica, los parámetros  $\theta$ ,  $\kappa$  y  $\sigma$ , se interpretan como la varianza de largo plazo, la tasa de reversión a la varianza de largo plazo y la volatilidad de la varianza (a menudo denominada como la volatilidad de la volatilidad), respectivamente. Heston muestra que el precio al tiempo  $t$  de una opción de compra con tiempo un vencimiento  $T - t$  (como proporción de año), denotado por  $c(S, v, t)$ , está dada por:

$$c(S, v, t) = S_t P_1 - KP(t, T)P_2 \tag{2}$$

donde  $S_t$  es el precio spot del activo,  $K$  el precio de ejercicio de la opción y,  $P(t, T)$  es un factor de descuento. Por ejemplo, si  $r$  es una tasa de interés constante y continuamente capitalizable, entonces se puede tomar  $P(t, T) = e^{-r(T-t)}$ . El precio de una opción de venta europea al tiempo  $t$ , se obtiene con la paridad *put-call* como sigue:

$$p(S, v, t) = c(S, v, t) + KP(t, T) - S_t \tag{3}$$

Las cantidades  $P_1$  y  $P_2$  son las probabilidades de que la opción expire dentro del dinero, condicionales al logaritmo del precio del subyacente,  $x_t = \ln(S_t) = x$ , y a la volatilidad,  $v_t = v$ , ambas al tiempo  $t$ . Para valuar opciones es necesaria una dinámica neutral al riesgo, que en este caso está expresada en términos de los parámetros neutrales al riesgo  $\kappa$  y  $\theta$  como sigue:

$$\begin{aligned} dx_t &= \left( r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}^* \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_{2,t}^* \end{aligned} \tag{4}$$

A continuación, se obtiene el proceso neutral al riesgo para el precio del subyacente y la varianza expresados en la ecuación anterior. Supongamos que el precio de la acción es conducido por:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sqrt{v} dW_1$$

donde  $S = S_t$ ,  $v = v_t$  y  $dW_1 = dW_{1,t}$ . Después de aplicar el lema de Itô al proceso  $x = \ln S$ , se sigue que

$$dx = \left( \mu - \frac{1}{2}v \right) dt + \sigma \sqrt{v} dW_1 \quad (5)$$

Por otra parte, el proceso para la raíz cuadrada de la varianza  $\sqrt{v}$  satisface:

$$d\sqrt{v} = -\beta \sqrt{v} dt + \delta dW_2 \quad (6)$$

donde  $\beta$  y  $\delta$  son parámetros y  $dW_2 = dW_{2,t}$ . Al aplicar el lema de Itô, se tiene que el proceso para la varianza  $v$  es el proceso de Cox, Ingersoll y Ross (1985), es decir,

$$dv = \kappa(\theta - v)dt + \sigma \sqrt{v} dW_2 \quad (7)$$

donde  $\kappa = 2\beta$ ,  $\theta = \delta^2/2\beta$  y  $\sigma = 2\delta$ . Si  $\kappa$ ,  $\theta$  y  $\sigma$  satisfacen las condiciones  $2\kappa\theta > \sigma^2$  y  $v_0 > 0$ , se puede demostrar que la varianza  $v_t$  es siempre positiva y su proceso dado en (7) está bien definido en estas condiciones, esa propiedad se conoce como condición de proceso de raíz cuadrada de Feller. Si se expresa (5) como el proceso neutral al riesgo:

$$\begin{aligned} d \ln S &= \left( r - \frac{1}{2}v \right) dt + (\mu - r)dt + \sigma \sqrt{v} dW_1 \\ &= \left( r - \frac{1}{2}v \right) dt + \sigma \sqrt{v} dW_1^* \end{aligned}$$

donde  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo y

$$W_1^* = \left( W_1 - \frac{\mu - r}{\sqrt{v}} t \right) \quad (8)$$

entonces la versión neutral al riesgo del proceso en (7) para  $v$  está dada por

$$dv = \kappa(\theta - v)dt - \lambda dt + \sigma dW_2^* \tag{9}$$

donde  $\lambda = \lambda(t, S_t, v_t)$  es el premio al riesgo por volatilidad, y

$$W_2^* = \left( W_2 - \frac{\lambda}{\sigma} t \right) \tag{10}$$

Por lo tanto, los procesos para el precio de la acción y para la varianza son, respectivamente,

$$d \ln S = \left( r - \frac{1}{2} v \right) dt + \sigma \sqrt{v} dW_1^* \tag{11}$$

y

$$dv = \kappa(\theta - v)dt - \lambda dt + \sigma dW_2^* \tag{12}$$

donde

$$\begin{pmatrix} W_1^* \\ W_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 + \frac{\mu - r}{\sqrt{v}} t \\ W_2 + \frac{\lambda}{\sigma} t \end{pmatrix} \tag{13}$$

Bajo la medida de probabilidad  $P$  se tiene que  $W_1 \sim N(0, T)$  y  $W_2 \sim N(0, T)$ , es necesaria una nueva medida  $Q$  tal que  $W_1^* \sim N(0, T)$  y  $W_2^* \sim N(0, T)$  bajo  $Q$ . Por el teorema de Girsanov, la medida  $Q$  existe si  $\lambda(t, S_t, v_t)$  y  $(\mu - r)t/\sqrt{v}$  satisfacen la condición de Novikov. Como se explica en Heston (1993), el modelo de consumo de Breeden (1979), aplicado al proceso CIR, produce un premio al riesgo por volatilidad de la forma  $\lambda(t, S_t, v_t) = \lambda v$ . En este caso, el proceso para la varianza en (12) se transforma en:

$$\begin{aligned} dv &= \kappa(\theta - v)dt - \lambda v dt + \sigma dW_2^* \\ &= (\kappa + \lambda) \left( \frac{\kappa \theta}{\kappa + \lambda} - v \right) dt + \sigma dW_2^* \\ &= \kappa^* (\theta^* - v) dt + \sigma dW_2^* \end{aligned} \tag{14}$$

donde  $\kappa^* = \kappa + \lambda$  y  $\theta^* = \kappa \theta / (\kappa + \lambda)$  son los parámetros neutrales al riesgo. Si se omite el asterisco de  $\kappa^*$  y  $\theta^*$ , los procesos para el precio de la acción y la varianza son:

$$\begin{aligned} dx_t &= \left( r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}^* \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}^* \end{aligned} \tag{15}$$

las cuales coinciden con las ecuaciones en (4). De acuerdo con la dinámica anterior, las probabilidades  $P_1$  y  $P_2$  se interpretan como las probabilidades ajustadas al riesgo o neutrales al riesgo. Por lo tanto,

$$P_j = P(x_T \geq \ln K | x_t = x, v_t = v) \tag{16}$$

para  $j = 1, 2$ . Las probabilidades  $P_j$  se obtienen al invertir las funciones características  $f_j$  en

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j}{i\phi} \right] d\phi \tag{17}$$

donde:

$$\begin{aligned} f_j &= \exp(C_j + D_j v + i\phi x), \text{ con } v = v_t \\ C_j &= r\phi i\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2 \ln \left[ \frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right] \right\} \\ D_j &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2} \left[ \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right] \\ g_j &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi i - d_j} \\ d_j &= \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)} \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores  $\tau = T - t$  es el plazo al vencimiento,  $i = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria,  $u_1 = 1/2, u_2 = -1/2, b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$  y  $b_2 = \kappa + \lambda$ . El parámetro  $\lambda$  representa la prima al riesgo por volatilidad como función del precio del activo, el tiempo y la volatilidad. Aunque (2) y (3) se consideran soluciones en forma cerrada, cada una requiere calcular dos integrales complejas, como se observa en (17), por lo que es necesario recurrir a un método numérico para aproximar las integrales y obtener el precio de la opción.

Por otro lado, si se escribe  $x_t = \ln(S_t/S_0) - \mu t$ , entonces se puede expresar el modelo de Heston en (1) en términos del rendimiento centrado  $x_t$  y de  $v_t$  (véase Čivžek *et al.*, 2011). De esta manera, el proceso es caracterizado por la transición  $P_t(x, v|v_0)$  del rendimiento  $x$  y la varianza  $v$  al tiempo  $t$  dado un rendimiento inicial  $x = 0$  y varianza  $v_0$  al tiempo  $t = 0$ . La dinámica temporal de  $P_t(x, v|v_0)$  es conducida por la siguiente ecuación de Fokker-Planck (o *forward* Kolmogorov):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P = & \kappa \frac{\partial}{\partial v} \{ (v - \theta) P \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (vP) + \rho \sigma \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} (vP) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (vP) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (vP) \end{aligned} \tag{18}$$

Al resolver esta ecuación se obtiene la siguiente fórmula semianalítica para la densidad de los rendimientos centrados de  $x$ , dado un cambio en el precio en un intervalo de tiempo  $t$ , de acuerdo con Dragulescu y Yakovenko (2002):

$$P_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x + F_t(\xi)} d\xi \tag{19}$$

donde:

$$\begin{aligned} F_t(\xi) = & \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \gamma t - \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left( \cosh \frac{\Omega t}{2} + \frac{\Omega^2 - \gamma^2 + 2\kappa\gamma}{2\kappa\Omega} \sinh \frac{\Omega t}{2} \right) \\ \gamma = & \kappa + i\rho\sigma\xi, \quad y \quad \Omega = \sqrt{\gamma^2 + \sigma^2(\xi^2 - i\xi)} \end{aligned}$$

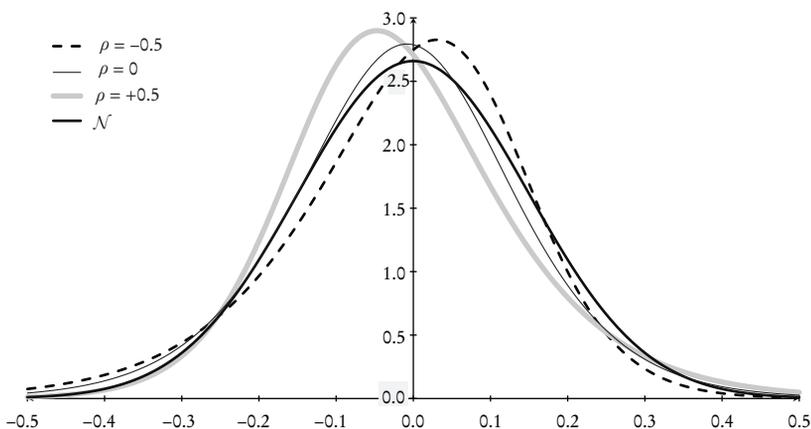
A continuación, se muestra gráficamente la densidad marginal del modelo de Heston dada por (19) para diferentes valores de  $\rho$ , con parámetros dados por:

CUADRO 2. *Parámetros de la densidad marginal de Heston con diferentes valores de  $\rho$*

$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$x$
2	0.025	0.225	-0.5, 0, +0.5	(-0.5, 0.5)

La gráfica 1 muestra la función de densidad marginal del modelo de Heston para diferentes valores de  $\rho$  y se compara con la densidad de una distribución normal  $\mathcal{N} \sim (0, 0.15)$ . Obsérvese que el parámetro de correlación controla, en efecto, el sesgo de la densidad. En efecto, si  $\rho = -0.5$ , la densi-

GRÁFICA 1. *Función de densidad marginal del modelo de Heston para diferentes valores de  $\rho$*



FUENTE: elaboración propia.

dad muestra sesgo negativo, mientras que si  $\rho = +0.5$ , la densidad muestra sesgo positivo, en el caso de  $\rho = 0$ , la densidad es simétrica. De la misma manera, se muestra la densidad del modelo de Heston para diferentes valores del parámetro de volatilidad de la varianza  $\sigma$ , con parámetros dados el siguiente cuadro.

CUADRO 3. *Parámetros de la densidad marginal de Heston con diferentes valores de  $\sigma$*

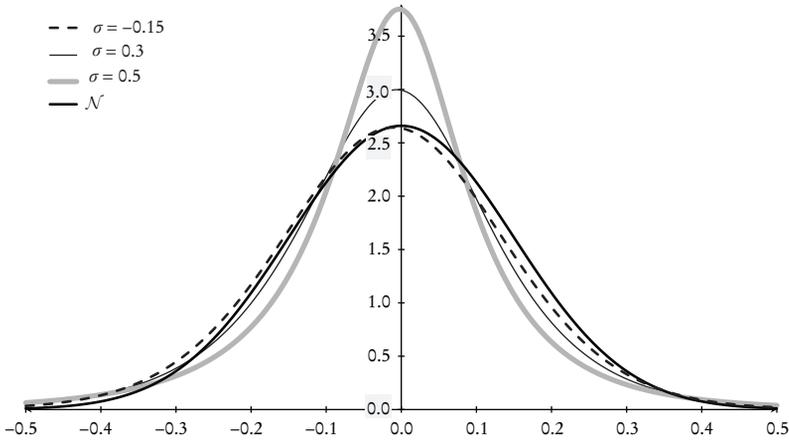
$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$x$
2	0.025	0.15, 0.3, 0.5	0	(-0.5, 0.5)

La gráfica 2 muestra la función de densidad marginal del modelo de Heston para diferentes valores de  $\sigma$  y se compara con la densidad de una distribución normal  $\mathcal{N} \sim (0, 0.15)$ . Obsérvese que el parámetro de volatilidad de la volatilidad controla la curtosis de la densidad; por lo tanto, si  $\sigma$  es relativamente alta, entonces la densidad presenta exceso de curtosis con su correspondiente efecto en las colas (colas pesadas).

### III. CÁLCULO DE LA PRIMA DE LA OPCIÓN POR MEDIO DE LA TRANSFORMACIÓN DE LEWIS

El cálculo del precio de la opción con el modelo de Heston tiene algunos detalles técnicos, un tanto complejos, que hay que tomar en cuenta, ya

GRÁFICA 2. Función de densidad marginal del modelo de Heston para diferentes valores de  $\sigma$



FUENTE: elaboración propia.

que es necesario evaluar las integrales complejas en (17). La forma cerrada requiere los siguientes parámetros: el precio spot del activo  $S = S_t$ , el precio de ejercicio  $K$ , el tiempo al vencimiento  $\tau = T - t$ , y la tasa de interés libre de riesgo y constante  $r$ , además de estimaciones para los parámetros que conducen el proceso de tendencia, como son: la varianza de largo plazo  $\theta$ , la varianza actual  $v_t$ , el premio al riesgo por volatilidad  $\lambda$ , el parámetro de reversión a la media  $\kappa$ , la volatilidad de la varianza  $\sigma$ , y la correlación entre los procesos que conducen el precio del activo y la volatilidad,  $\rho$ .

Lewis (2000) muestra que el precio de la opción  $c(S, V, \tau)$  en el modelo de Heston (1993) se puede expresar en términos de la transformada fundamental  $\hat{H}(k, V, \tau)$ , donde  $k = k_r - ik_i$  es un número complejo,  $V$  la volatilidad y  $\tau = T - t$ , el plazo al vencimiento. Con esta transformación se obtienen precios de opciones de manera más sencilla, ya que sólo se necesita evaluar una integral. La fórmula general para el precio de una opción de compra bajo una clase general de modelos de volatilidad estocástica está dada por:

$$c(S, V, \tau) = Se^{-\delta\tau} - Ke^{-r\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{ik_i - \infty}^{ik_i + \infty} e^{-ikX} \frac{\hat{H}(k, V, \tau)}{k^2 - ik} dk \tag{20}$$

donde  $X = \ln S/K + (r - \delta)\tau$ ,  $k_i = 1/2$  y  $\delta$  es la tasa de dividendos. Para el modelo de Heston la transformada fundamental es de la forma:

$$\hat{H}(k, V, \tau) = \exp[f_1(t) + f_2(t)V_t] \tag{21}$$

donde:

$$f_1(t) = \tilde{\omega} \left[ tg - \ln \left( \frac{1 - b \exp(td)}{1 - b} \right) \right] \quad f_2(t) = g \left( \frac{1 - \exp(td)}{1 - b \exp(td)} \right) \tag{22}$$

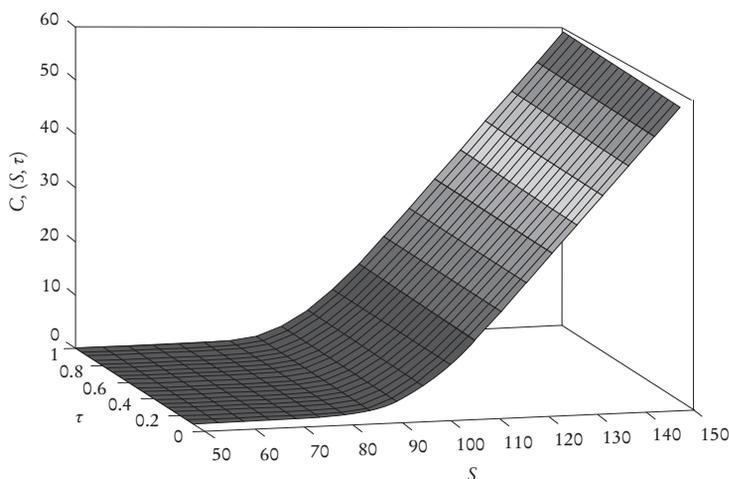
$$d = (\hat{\theta}^2 + 4\tilde{c})^{1/2}, \quad g = \frac{1}{2}g(\hat{\theta} + d), \quad b = \frac{\hat{\theta} + d}{\hat{\theta} - d} \tag{23}$$

$$\hat{\theta} = \frac{2}{\sigma^2} \left[ (1 - \gamma - ik)\rho\sigma + \sqrt{k^2 - \gamma(1 - \gamma)\sigma^2} \right] \text{ para } \gamma < 1 \tag{24}$$

y además:  $t = \sigma^2\tau/2$ ,  $\tilde{\omega} = 2k\theta/\sigma^2$ ,  $\tilde{c} = 2c(k)/\sigma^2$  y  $c(k) = k^2 - ik/2$ . En este caso,  $\gamma$  es un parámetro de aversión al riesgo, y se restringe a  $\gamma \leq 1$ . Ésta es otra manera de representar la prima al riesgo por volatilidad, la cual supone neutralidad al riesgo y proporciona una expresión de la prima al riesgo ajustada por volatilidad dada por  $\lambda$ , con  $\lambda$  proporcional a la varianza,  $\lambda(t, S_t, v_t) = \lambda v$ .

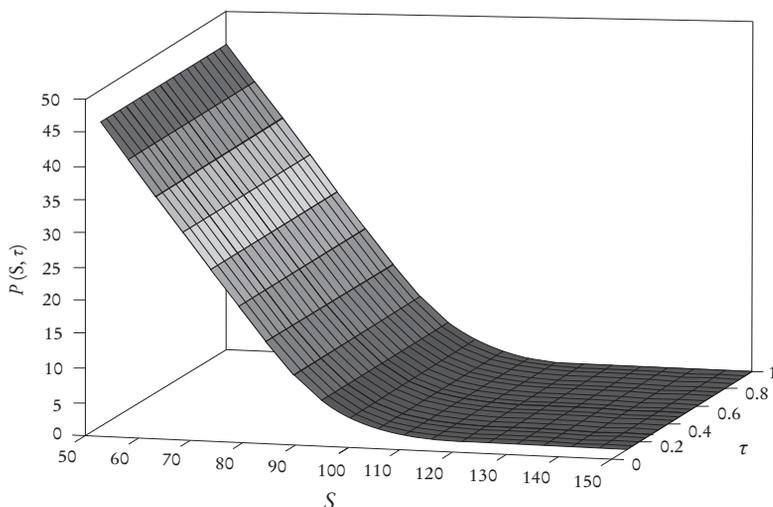
En la gráfica 3 se muestra una superficie de precios de opciones de compra y en la gráfica 4 una superficie de precios de opciones de venta, los precios de las opciones se calculan con la transformada fundamental de Lewis y parámetros dados por:

GRÁFICA 3. Superficie de precios opciones de compra con el modelo de Heston



FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 4. *Superficie de precios opciones de venta con el modelo de Heston*



FUENTE: elaboración propia.

CUADRO 4. *Parámetros empleados para calcular precios de opciones del modelo de Heston con la transformada de Lewis*

$\nu$	$\kappa$	$\theta$	$\lambda$	$\sigma$	$\rho$	$K$	$r$	$\delta$	$k_i$	$\gamma$
0.01	2	0.01	0	0.1	-0.5	100	0	0	0.5	1

El plazo al vencimiento es desde  $T - t = \tau = 0.1, \dots, 1$  y el precio del subyacente varía dentro del rango:  $S_t = 50, \dots, 150$ .

#### IV. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DEL MODELO DE HESTON CON FUNCIONES DE PÉRDIDA CUADRÁTICAS

Si se estiman los parámetros de un modelo de volatilidad estocástica mediante series históricas de rendimientos de los activos, no todos los parámetros serían útiles para efectos de valuación de derivados, ya que los parámetros estimados estarían bajo una medida de probabilidad verdadera, mientras que los negociadores de derivados ajustan tales parámetros para la determinación de precios de derivados. En particular, para los modelos de volatilidad estocástica el coeficiente de la varianza es una modificación del valor verdadero, lo cual es resultado del supuesto de que la prima de riesgo de volatilidad es independiente del precio del subyacente y del tiempo,

además de ser proporcional a la volatilidad,<sup>2</sup> es decir:  $\lambda(t, v, S) = \lambda v$ . Para recuperar tal prima de riesgo, es necesario consultar precios de algunos derivados que se negocien en el mercado.

Por esa razón, en la industria y en la investigación (Bakshi, Cao y Chen, 1997) cada vez hay más preferencia por utilizar únicamente precios de derivados y calibrar un modelo en base a un conjunto de opciones líquidas. Un procedimiento estándar es el siguiente: una mesa de derivados planea vender una opción exótica y a la vez cubrir su exposición, además se supone que se emplea un modelo de volatilidad estocástica. La primera etapa consiste en obtener un conjunto de precios de mercado de opciones europeas líquidas, para después calibrar el modelo. Los parámetros calibrados son los neutrales al riesgo, y por lo tanto se pueden utilizar sin modificaciones para valuar y cubrir la opción exótica. En cierto sentido, es una generalización de la metodología para obtener las volatilidades implícitas bajo el modelo de Black, Scholes y Merton, el propósito de la calibración es valuar la opción exótica de tal manera que sea consistente con los precios de mercado de las europeas. Si el modelo calibrado genera precios consistentes con el mercado, entonces los parámetros estimados deberían ser estacionarios a través del tiempo, y su variabilidad se debe sólo a errores de medición. En la práctica, por supuesto, esto no sucede así, y se tiene que recalibrar los parámetros diariamente o con mayor frecuencia si es necesario.

Para la calibración se debe minimizar una cierta medida de distancia entre los precios de mercado y los precios teóricos dados por el modelo. Es decir, se determinan parámetros tales que el error entre los precios de mercado y los precios del modelo teórico sea el mínimo posible, tal error es medido por una función de pérdida. Supongamos que se cuenta con un conjunto  $N$  de precios de mercado de opciones denotados por  $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$  y que los precios del modelo dependen de un conjunto de parámetros  $\Theta \equiv \{\rho, \kappa, \theta, \sigma, v(0), k_i, \gamma\}$  que en este caso son los de la transformada fundamental de Lewis. De acuerdo con Bakshi *et al.* (1997) se pueden construir tres funciones de pérdida:

- i) Función de pérdida del error cuadrático medio: \$FEM;
- ii) Función de pérdida relativa del error cuadrático medio: %FEM;
- iii) Función de pérdida del error cuadrático medio de volatilidad implícita: FEMVI.

<sup>2</sup> Véase Heston (1993), p. 329.

La función de pérdida del error cuadrático medio es el promedio de los cuadrados de los errores estimados:

$$\$FEM(\Theta) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i(\Theta)^2 \right]^2 \quad (25)$$

donde  $e_i(\Theta) = P_i - P_i(\Theta)$  son los errores de estimación para  $i = 1, 2, \dots, N$ . La función de pérdida relativa del error cuadrático medio está definida por:

$$\%FEM(\Theta) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{e_i(\Theta)}{P_i} \right)^2 \right]^2 \quad (26)$$

La función de pérdida del error cuadrático medio de volatilidad implícita se define por:

$$FEMVI(\Theta) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_i(\Theta))^2 \right]^2 \quad (27)$$

Con el propósito de encontrar los parámetros que minimicen las funciones en (25) y (26) se plantean como:

$$\$RFEM = \text{Min}_{\Theta} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i(\Theta)^2} \quad (28)$$

y

$$\%RFEM = \text{Min}_{\Theta} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{e_i(\Theta)}{P_i} \right)^2} \quad (29)$$

A diferencia de la raíz cuadrada de la función de pérdida del error cuadrático medio  $\$RFEM$  que minimiza el promedio de la raíz cuadrada de la diferencia entre precios de mercado y precios del modelo teórico, la raíz función de pérdida relativa del error cuadrático medio  $\$RFEM$  en (28) minimiza el porcentaje o diferencia relativa entre tales precios, Bakshi *et al.* (1997) y Heston y Nandi (2000) estiman parámetros con este enfoque.  $\$RFEM$  y  $\$RFEM$  arrojan parámetros que minimizan la distancia entre precios de mercado y precios del modelo teórico. También se pueden determinar parámetros que mini-

micen la distancia entre volatilidades implícitas obtenidas a partir de precios de mercado y las volatilidades implícitas obtenidas a partir de precios del modelo teórico, por medio de la raíz de la función de pérdida de volatilidad implícita del error cuadrático medio RFEMIV definida por:

$$\text{RFEMIV} = \text{Min}_{\Theta} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_i(\Theta))^2} \quad (30)$$

En la expresión anterior  $\sigma_i$  es la volatilidad implícita de Black, Scholes y Merton, que se obtiene al invertir la fórmula de BSM e igualarla a precios de mercado, y  $\sigma_i(\Theta)$  es la volatilidad implícita de BSM obtenida al invertir la fórmula de BSM e igualarla a precios obtenidos con el modelo teórico.

Los parámetros estimados obtenidos de la función de pérdida en (30) pueden utilizarse para modelar algunas propiedades de la distribución de los rendimientos del activo subyacente, ya que la forma de la curva de volatilidad implícita representa la distribución de rendimientos del activo subyacente en estudio. Una mueca de volatilidad (*volatility smirk*) implica un sesgo o asimetría en la distribución, mientras que una sonrisa de volatilidad (*volatility smile*) implica curtosis.

Cada una de las funciones de pérdida descritas asigna una ponderación diferente a las opciones. La raíz de la función de pérdida del error cuadrático medio \$RFEM asigna más peso a opciones dentro-del-dinero, lo cual se debe a que dichas opciones son más caras. Cualquier error en la estimación dado por una diferencia entre los precios de mercado y los precios ajustados es causado por estas opciones, la raíz de la función de pérdida del error cuadrático medio \$RFEM tenderá a producir parámetros que conducen a errores pequeños de valuación para opciones dentro-del-dinero. Por su parte, la raíz de la función de pérdida relativa del error cuadrático medio %RFEM asigna más peso a opciones muy fuera del dinero, debido a que estas opciones tienen poco valor. Por último la raíz de la función de pérdida del error cuadrático medio de volatilidad implícita RFEMVI asigna una ponderación similar a todas las opciones.

## V. CALIBRACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Con el propósito de aplicar la metodología descrita en la sección anterior, se tomaron los datos del Boletín del Resumen del Mercado de Opciones

(BRMO) del día 25/10/2013 de MexDer. Este resumen contiene las opciones que tienen contratos abiertos, es decir, que tienen operación y cierta liquidez. En este trabajo se consideran opciones europeas sobre acciones de América Móvil, S.A.B. de C.V. serie L (AMX-L), Wal-Mart de México, S.A.B. de C.V. serie V (WALMEX-V) y Grupo México, S.A.B. de C.V. serie B (GMEXICO-B) con un plazo al vencimiento de 56 días; asimismo, se obtuvieron del proveedor de precios (*vendor*) la curva TIIIE28-IRS para la tasa libre de riesgo, las volatilidades implícitas y la “delta” de todas las opciones negociadas en ese día.

### 1. Calibración para opciones sobre AMX-L

El cuadro 5 muestra datos relevantes para la calibración de los parámetros para opciones sobre AMX-L:

CUADRO 5. *Parámetros relevantes*

<i>Fecha actual</i> $t$	<i>Fecha de vencimiento</i> $T$	<i>Plazo al vencimiento</i> $t = T - t$	<i>Tasa libre de riesgo</i> $r$	<i>Precio spot AMX-L</i> $S_t$
25/10/2013	20/12/2013	0.155556	0.037493	13.66

FUENTE: elaboración propia.

El cuadro 6 muestra un resumen de los valores de las funciones de pérdida y los valores estimados de los parámetros del modelo de Heston para cada función de pérdida. En la calibración<sup>3</sup> se utilizó la transformada fundamental de Lewis.

CUADRO 6. *Resumen de las funciones de pérdida con los correspondientes valores de los parámetros estimados del modelo de Heston con la transformada de Lewis*

	$\$RFEM$	$\%RFEM$	$RFEMVI$
Valor de la función de pérdida	0.0587	0.0553	0.0253
Rho ( $\rho$ )	-0.6133	-0.6462	-0.5367
Kappa ( $\kappa$ )	1.7418	0.9952	1.8569
Theta ( $\theta$ )	0.1225	0.1618	0.1289
Volatilidad de la varianza ( $\sigma$ )	0.9567	0.8754	0.9336
Varianza actual ( $V_0$ )	0.0698	0.0873	0.0691
Parte imaginaria de $k(k_i)$	0.5538	0.5748	0.5637
Gamma ( $\gamma$ )	0.0166	0.0026	0.0169

FUENTE: elaboración propia.

<sup>3</sup> Para la calibración se utilizó el algoritmo de Nelder-Mead, descrito en Lagarias, Reeds, Wright y Wright (1999).

CUADRO 7. Precios estimados con el modelo de Heston con las funciones de pérdida y volatilidades implícitas

Tipo de opción	Precio de ejercicio	Moneyness (K/S)	Precio de cierre	Vol. imp. B.S.	\$REM-V.I.		%REM-V.I.		REMVI-V.I.		Vol. imp. mdo.
					Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	
Put	12.5	0.915	0.29	0.3688	0.22	0.320	0.27	0.359	0.22	0.323	0.368
Put	13.0	0.952	0.42	0.3514	0.33	0.304	0.41	0.348	0.34	0.311	0.349
Call	12.5	0.915	1.29	0.2018	1.34	0.246	1.30	0.213	1.29	0.197	0.205
Call	13.0	0.952	0.90	0.2111	0.96	0.246	0.94	0.236	0.91	0.219	0.209
Call	13.5	0.988	0.58	0.2134	0.64	0.238	0.64	0.240	0.60	0.222	0.216
Call	14.0	1.025	0.37	0.2270	0.38	0.228	0.39	0.237	0.35	0.219	0.226
Call	14.5	1.061	0.23	0.2389	0.20	0.219	0.22	0.231	0.19	0.216	0.238

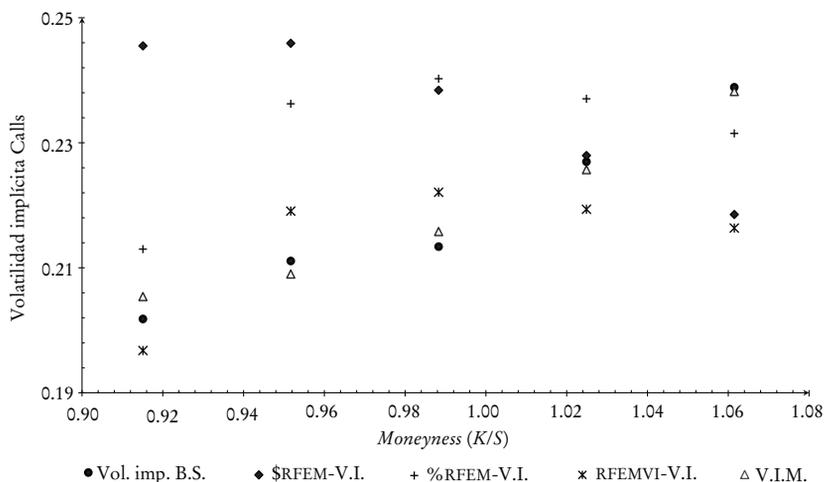
FUENTE: elaboración propia.

La interpretación de los valores de las funciones de pérdida es la siguiente. El valor de \$RFEM es de 0.0587, el cual corresponde a un error de aproximadamente 5.9 centavos, en promedio, entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por su parte, el valor de %RFEM es de 0.0553, que corresponde a un error de aproximadamente 5.53% en promedio entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por último, el valor de RFEMIV es de 0.0253 corresponde a una diferencia de 2.53% entre las volatilidades implícitas obtenidas de los precios de mercado y las volatilidades implícitas obtenidas con el modelo de Heston.

El cuadro 7 muestra los precios de cierre de opciones de compra y venta AMX-L obtenidos del boletín, la volatilidad implícita calculada con el método de bisección y los correspondientes precios estimados con el modelo de Heston junto con las volatilidades implícitas y los valores de las funciones de pérdida, además de las volatilidades implícitas que reporta el boletín.

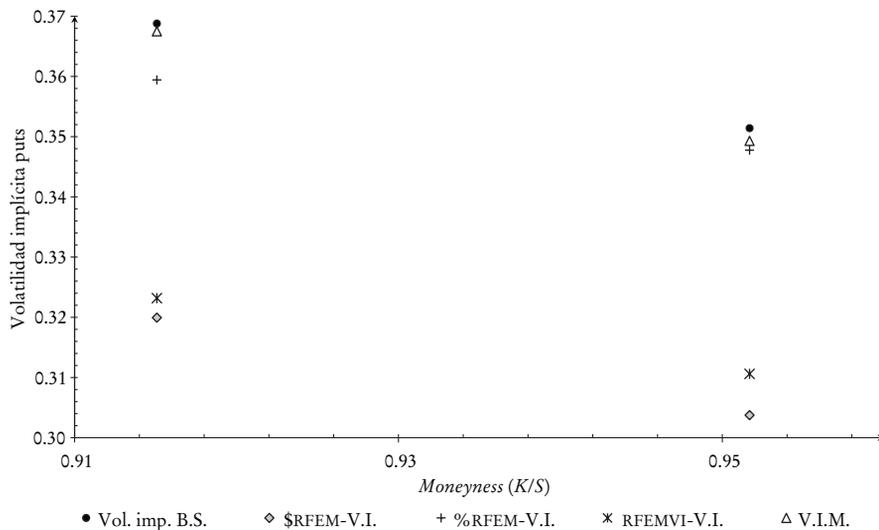
En las gráficas 5 y 6 se muestran los resultados obtenidos en el cuadro 7. Obsérvese que los valores estimados por \$RFEM y %RFEM para opciones de compra producen volatilidades implícitas que en su mayoría están alejadas de las volatilidades del mercado. Por su parte, los valores estimados por RFEMVI para opciones de compra producen volatilidades implícitas que están

GRÁFICA 5. Volatilidades implícitas de opciones de compra obtenidas de las funciones de pérdida



FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 6. Volatilidades implícitas de opciones de venta obtenidas de las funciones de pérdida



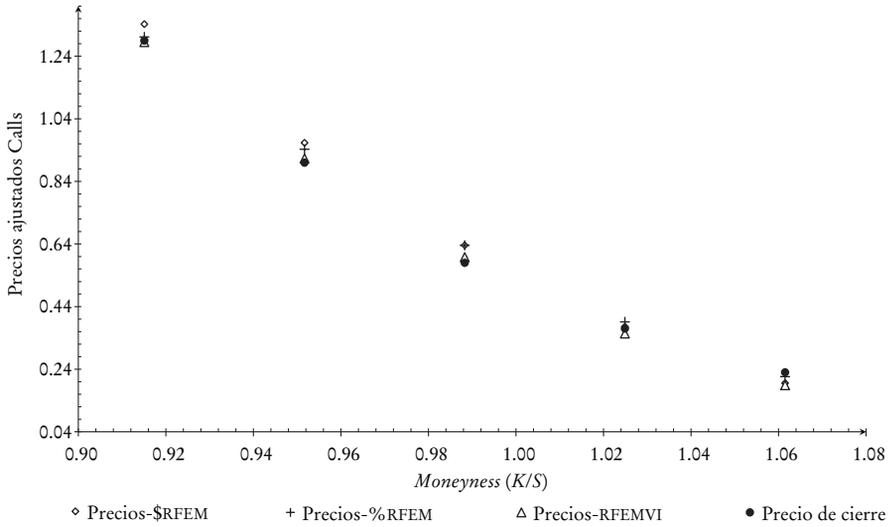
FUENTE: elaboración propia.

razonablemente cerca de las volatilidades del mercado en todos los niveles de *moneyness*. Para opciones de venta, el mejor ajuste corresponde a %RFEM.

En las gráficas 7 y 8 se muestran las comparaciones entre los precios de mercado teóricos a través de las funciones de pérdida. Obsérvese que los valores estimados por RFEMVI para opciones de compra son muy cercanos a los publicados por el boletín de MexDer. Para opciones de venta, los valores estimados de \$RFEM y RFEMVI son mayores a los publicados en el boletín, lo anterior se debe a que para opciones de compra se cuenta con cinco precios, de los cuales tres son de opciones que están dentro-del-dinero y los dos precios restantes son de opciones fuera-del-dinero. Para opciones de venta sólo hay dos precios de mercado y ambos están fuera-del-dinero.

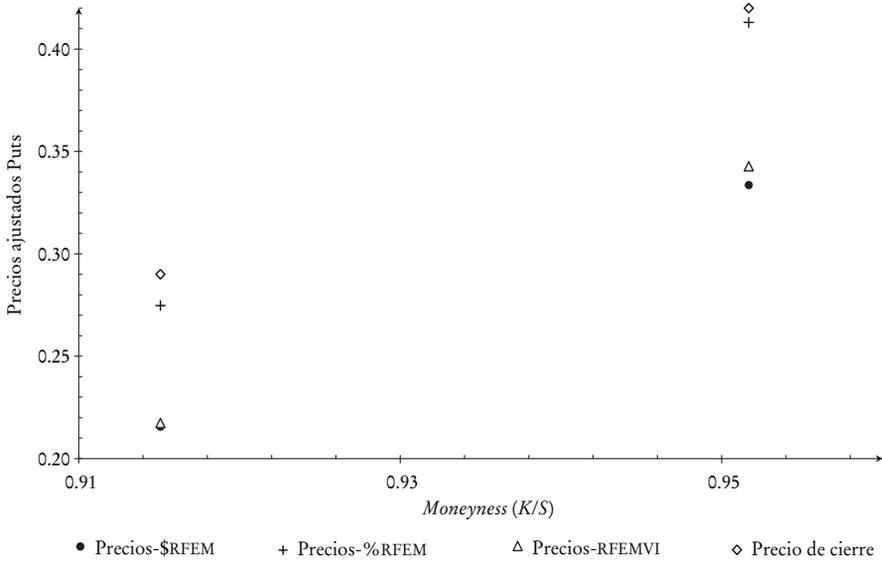
Una vez que se han calibrado los parámetros del modelo es deseable examinar la eficiencia de la calibración con las tres funciones de pérdida. Para ello se determinan los precios de todas las opciones de compra y de venta que forman parte del boletín de opciones y sus volatilidades implícitas con los parámetros estimados, pero con la particularidad de que, para el caso de %RFEM, se hace la valuación sólo para opciones cuyo precio de liquidación es mayor a \$0.50, como lo sugiere Bakshi *et al.* (1997). Los resultados se muestran en el cuadro 8.

GRÁFICA 7. Comparación entre precios estimados de opciones de compra y precios de mercado



FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 8. Comparación entre precios estimados de opciones de venta y precios de mercado



FUENTE: elaboración propia.

CUADRO 8. *Resumen de las funciones de pérdida con los correspondientes valores ajustados de los parámetros estimados del modelo de Heston con la transformada de Lewis*

	$\$RFEM$	$\%RFEM$	$RFEMVI$
Valor de la función de pérdida	0.0498	0.0472	0.3053
Rho ( $\rho$ )	-0.6133	-0.6462	-0.5367
Kappa ( $\kappa$ )	1.7418	0.9952	1.8569
Theta ( $\theta$ )	0.1225	0.1618	0.1289
Volatilidad de la varianza ( $\sigma$ )	0.9567	0.8754	0.9336
Varianza actual ( $V_0$ )	0.0698	0.0873	0.0691
Parte imaginaria de $k(k_i)$	0.5538	0.5748	0.5637
Gamma ( $\gamma$ )	0.0166	0.0026	0.0169

FUENTE: elaboración propia.

En el cuadro anterior se observa que el valor de  $\$RFEM$  es de 0.0498, lo que corresponde a un error de aproximadamente 5 centavos en promedio entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por su parte, el valor de  $\%RFEM$  es de 0.0472, lo que corresponde a un error de aproximadamente 4.7% en promedio entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por último, el valor de  $RFEMIV$  es de 0.3053, el cual corresponde a una diferencia de 30.5% entre las volatilidades implícitas obtenidas de los precios de mercado y las volatilidades implícitas obtenidas del modelo de Heston.

Los cuadros 9 y 10 muestran, respectivamente, los precios de cierre de opciones de compra y de venta de AMX-L obtenidos del boletín para cada precio de ejercicio reportado, la volatilidad implícita calculada con el método de bisección y los correspondientes precios estimados con el modelo de Heston junto con las volatilidades implícitas y los valores de las funciones de pérdida, además de las volatilidades implícitas provenientes del boletín.

En las gráficas 9 y 10 se muestran los resultados obtenidos en los cuadros 9 y 10. Obsérvese que, para opciones de compra, los valores estimados por  $\$RFEM$ ,  $\%RFEM$  y  $RFEMIV$  producen volatilidades implícitas que están alejadas de las volatilidades implícitas del mercado en todos los niveles de moneyness. Para opciones de venta y fuera del dinero, el mejor ajuste se obtiene con  $\%RFEM$ . Por último, el parámetro de correlación resultó negativo en todos los casos, lo cual implica que la densidad del subyacente tiene sesgo negativo.

CUADRO 9. Precios estimados de opciones de compra con el modelo de Heston con funciones de pérdida para cada precio de ejercicio (K) y sus volatilidades implícitas, y las volatilidades implícitas de mercado

Tipo de opción	Precio de ejercicio	Moneyness (K/S)	Precio de cierre	Vol. imp. B.S.	\$RFEM-V.I.		%RFEM-V.I.		RFEMVI-V.I.		Vol. imp. mdo.
					Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	
Call	10.5	0.769	3.22	NA	3.14	NA	3.05	NA	3.14	NA	0.2344
Call	11.0	0.805	2.72	NA	2.67	NA	2.59	NA	2.66	NA	0.2195
Call	11.5	0.842	2.23	0.1931	2.20	NA	2.13	NA	2.20	NA	0.2102
Call	12.0	0.878	1.75	0.2053	1.76	0.223	1.70	NA	1.75	0.212	0.2057
Call	12.5	0.915	1.29	0.1996	1.34	0.246	1.30	0.213	1.33	0.242	0.2054
Call	13.0	0.952	0.90	0.2092	0.96	0.246	0.94	0.236	0.96	0.245	0.2090
Call	13.5	0.988	0.58	0.2116	0.64	0.238	0.64	0.240	0.63	0.240	0.2158
Call	14.0	1.025	0.37	0.2252	0.38	0.228	0.39	0.237	0.38	0.232	0.2257
Call	14.5	1.061	0.23	0.2371	0.20	0.219	0.22	0.231	0.21	0.226	0.2382
Call	15.0	1.098	0.15	0.2540	0.09	0.213	0.11	0.227	0.10	0.223	0.2531
Call	15.5	1.135	0.10	0.2705	0.04	0.212	0.050	0.225	0.049	0.224	0.2701
Call	16.0	1.171	0.07	0.2882	0.02	0.214	0.022	0.225	0.023	0.226	0.2890
Call	16.5	1.208	0.05	0.3048	0.01	0.217	0.009	0.226	0.010	0.230	0.3097
Call	17.0	1.245	0.04	0.3265	0.00	0.220	0.004	0.227	0.005	0.234	0.3319
Call	17.5	1.281	0.04	0.3607	0.00	0.223	0.001	0.228	0.002	0.237	0.3555
Call	18.0	1.318	0.03	0.3732	0.00	0.224	0.000	0.226	0.001	0.239	0.3803

FUENTE: elaboración propia.

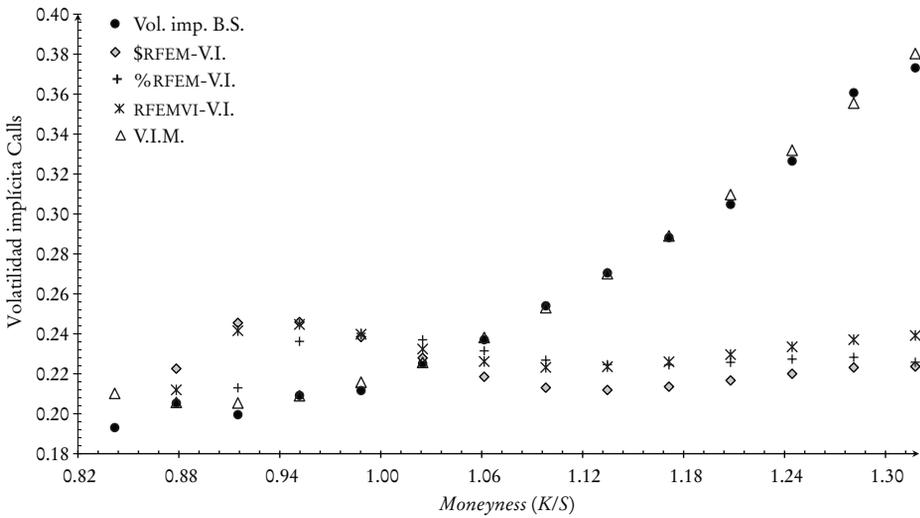
NA: no aplica.

CUADRO 10. Precios estimados de opciones de venta con el modelo de Heston con funciones de pérdida para cada precio de ejercicio (K) y sus volatilidades implícitas, y las volatilidades implícitas de mercado

Tipo de opción	Precio de ejercicio	Moneyess (K/S)	Precio de cierre	Vol. imp. B.S.	\$RREM-V.I.		%RREM-V.I.		RREMVI-V.I.		Vol. imp. mdo.
					Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	
Put	10.5	0.769	0.06	0.4503	0.03	0.386	0.04	0.414	0.02	0.377	0.4512
Put	11.0	0.805	0.09	0.4277	0.05	0.369	0.07	0.397	0.04	0.362	0.4283
Put	11.5	0.842	0.13	0.4022	0.08	0.353	0.11	0.383	0.08	0.347	0.4069
Put	12.0	0.878	0.20	0.3870	0.14	0.337	0.18	0.370	0.13	0.332	0.3866
Put	12.5	0.915	0.29	0.3664	0.22	0.320	0.27	0.357	0.21	0.317	0.3675
Put	13.0	0.952	0.42	0.3492	0.33	0.304	0.41	0.346	0.33	0.302	0.3493
Put	13.5	0.988	0.59	0.3301	0.50	0.289	0.60	0.336	0.50	0.290	0.3321
Put	14.0	1.025	0.83	0.3196	0.74	0.278	0.856	0.332	0.746	0.282	0.3158
Put	14.5	1.061	1.12	0.3063	1.06	0.275	1.18	0.335	1.07	0.281	0.3002
Put	15.0	1.098	1.47	0.2957	1.45	0.284	1.57	0.351	1.46	0.292	0.2854
Put	15.5	1.135	1.88	0.2943	1.90	0.306	2.01	0.378	1.90	0.313	0.2712
Put	16.0	1.171	2.34	0.3111	2.37	0.338	2.47	0.415	2.38	0.343	0.2577
Put	16.5	1.208	2.84	0.3572	2.86	0.374	2.96	0.455	2.86	0.378	0.2447
Put	17.0	1.245	3.34	0.4010	3.35	0.411	3.45	0.497	3.35	0.414	0.2323
Put	17.5	1.281	3.84	0.4428	3.85	0.448	3.95	0.539	3.85	0.451	0.2204
Put	18.0	1.318	4.34	0.4830	4.34	0.485	4.442	0.579	4.342	0.487	0.2090

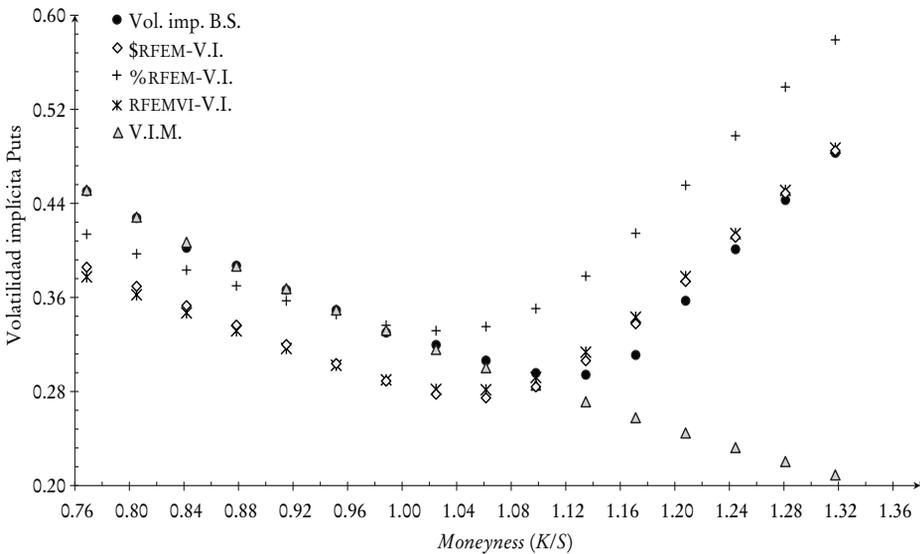
FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 9. Comparación entre volatilidades implícitas estimadas para opciones de compra y volatilidades implícitas de mercado



FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 10. Comparación entre volatilidades implícitas estimadas para opciones de venta y volatilidades implícitas de mercado



FUENTE: elaboración propia.

## 2. Calibración para opciones sobre WALMEX-V

El cuadro 11 muestra datos relevantes para la calibración de los parámetros para opciones sobre WALMEX-V:

Cuadro 11. *Parámetros relevantes*

<i>Fecha actual</i> $t$	<i>Fecha de vencimiento</i> $T$	<i>Plazo al vencimiento</i> $t = T - t$	<i>Tasa libre de riesgo</i> $r$	<i>Precio spot WALMEX-V</i> $S_t$
25/10/2013	20/12/2013	0.155556	0.037493	33.88

El cuadro 12 muestra un resumen de los valores de las funciones de pérdida y los valores estimados de los parámetros del modelo de Heston para cada función de pérdida.

CUADRO 12. *Resumen de las funciones de pérdida con los correspondientes valores de los parámetros estimados del modelo de Heston con la transformada de Lewis*

	$\$RFEM$	$\%RFEM$	$RFEMVI$
Valor de la función de pérdida	0.0497	0.0426	0.0139
Rho ( $\rho$ )	0.6636	0.6804	0.6291
Kappa ( $\kappa$ )	3.0885	1.6446	3.6893
Theta ( $\theta$ )	0.2878	0.2753	0.2506
Volatilidad de la varianza ( $\sigma$ )	0.3561	0.2654	0.3690
Varianza actual ( $V_0$ )	0.0008	0.0291	0.0011
Parte imaginaria de $k(k_i)$	0.4558	0.5382	0.6747
Gamma ( $\gamma$ )	0.1191	0.0857	0.1238

A continuación se proporciona la interpretación de los valores de las funciones de pérdida del cuadro 12. El valor de  $\$RFEM$  es de 0.0497, lo que corresponde a un error de aproximadamente 5 centavos en promedio entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por su parte, el valor de  $\%RFEM$  es de 0.0426, lo que conduce a un error de aproximadamente 4.3%, en promedio, entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por último, el valor de  $RFEMIV$  es de 0.0139, el cual corresponde a una diferencia de 1.4% entre las volatilidades implícitas obtenidas de los precios de mercado y las volatilidades implícitas obtenidas con el modelo de Heston.

El cuadro 13 muestra los precios de cierre de opciones de compra y venta de WALMEX-V obtenidos del BRMO, la volatilidad implícita calculada con

CUADRO 13. Precios estimados con el modelo de Heston con las funciones de pérdida y volatilidades implícitas

Tipo de opción	Precio de ejercicio	Moneyness (K/S)	Precio de cierre	Vol. imp. B.S.	\$RFEM-V.I.		%RFEM-V.I.		RFEMVI-V.I.		Vol. imp. mdo.
					Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	
Put	32.0	0.945	0.52	0.2533	0.51	0.250	0.52	0.253	0.50	0.249	0.253
Put	34.0	1.004	1.40	0.2719	1.39	0.268	1.41	0.274	1.37	0.266	0.269
Put	36.0	1.063	2.79	0.3054	2.73	0.291	2.78	0.302	2.71	0.289	0.299
Put	39.0	1.151	5.43	0.3799	5.30	0.343	5.38	0.367	5.29	0.340	0.363
Call	35.0	1.033	0.80	0.2245	0.83	0.228	0.76	0.217	0.81	0.227	0.224
Call	36.0	1.063	0.51	0.2277	0.55	0.235	0.50	0.226	0.54	0.234	0.228
Call	37.0	1.092	0.32	0.2324	0.36	0.242	0.32	0.233	0.35	0.240	0.232
Call	38.0	1.122	0.20	0.2383	0.23	0.248	0.20	0.239	0.22	0.245	0.237
Call	39.0	1.151	0.12	0.2423	0.15	0.253	0.12	0.245	0.13	0.249	0.243
Call	40.0	1.181	0.07	0.2456	0.09	0.257	0.08	0.250	0.08	0.252	0.249
Call	41.0	1.210	0.05	0.2584	0.06	0.262	0.05	0.254	0.04	0.254	0.255

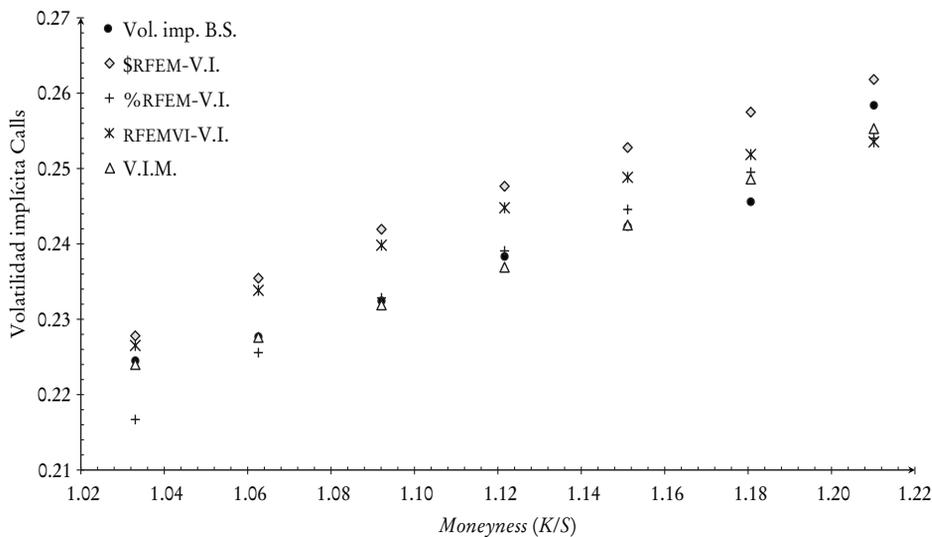
FUENTE: elaboración propia.

el método de bisección, y los correspondientes precios estimados con el modelo de Heston junto con las volatilidades implícitas y los valores de las funciones de pérdida, además de las volatilidades implícitas que reporta el boletín.

Los resultados obtenidos en el cuadro 13 se muestran en las gráficas 11 y 12. Obsérvese que, para opciones de compra, los valores estimados de %RFEM producen volatilidades implícitas que están cerca de las volatilidades implícitas del mercado en todos los niveles de moneyness, mientras que los valores estimados por \$RFEM y RFEMVI producen volatilidades implícitas que están alejadas de las volatilidades implícitas del mercado. Para opciones de venta en-el-dinero, el ajuste más próximo es para \$RFEM y RFEMVI. Para opciones de venta muy dentro-del-dinero, las volatilidades implícitas generadas por %RFEM son las más cercanas a las del mercado.

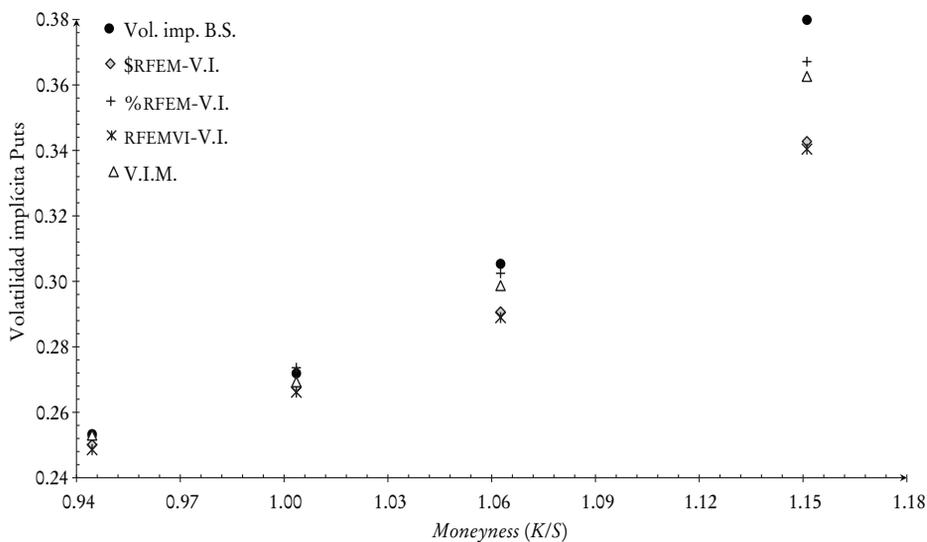
En las gráficas 13 y 14 se presentan los precios de mercado en comparación con los obtenidos teóricamente y, en cada caso, se muestran las funciones de pérdida. Obsérvese que para opciones de compra los valores estimados por %RFEM son los más cercanos a los publicados por el boletín de Mex-Der. Para opciones de venta, los valores estimados para las tres funciones, en general, producen precios muy cercanos a los publicados en el boletín. Cabe mencionar que en el caso de opciones de compra todas están fuera-del-dinero y de los cuatro precios de opciones de venta tres están dentro-del-dinero.

GRÁFICA 11. *Volatilidades implícitas de opciones de compra obtenidas de las funciones de pérdida*



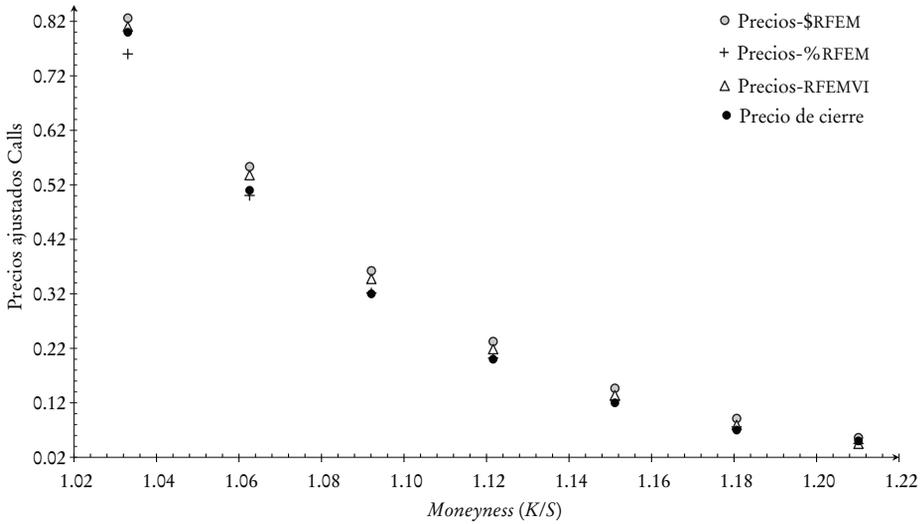
FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 12. *Volatilidades implícitas de opciones de venta obtenidas de las funciones de pérdida*



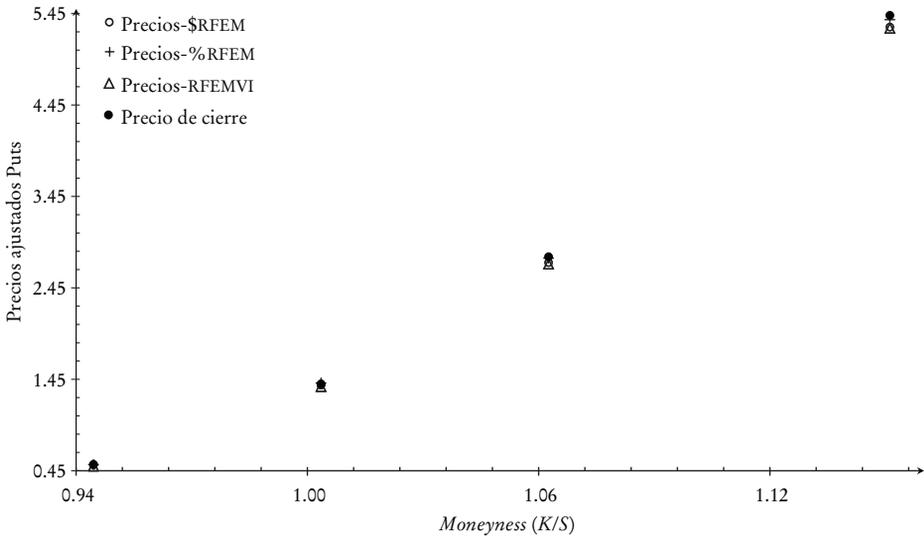
FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 13. *Comparación entre precios estimados de opciones de compra y precios de mercado*



FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 14. *Comparación entre precios estimados de opciones de venta y precios de mercado*



FUENTE: elaboración propia.

Con el propósito de analizar la eficiencia de la calibración de %RFEM se hace la valuación pero sólo para opciones cuyo precio de liquidación es mayor a \$0.50, esto con el fin de reducir las diferencias en precios al excluir opciones con primas con poco valor. En el boletín se verifica que para el caso de las opciones de compra todas están fuera-del-dinero y para opciones de venta tres de las cuatro están dentro-del-dinero. Los resultados se muestran a continuación:

CUADRO 14. *Resumen de las funciones de pérdida con los correspondientes valores ajustados de los parámetros estimados del modelo de Heston con la transformada de Lewis*

	$\$RFEM$	$\%RFEM$	$RFEMVI$
Valor de la función de pérdida	0.1203	0.0439	0.3912
Rho ( $\rho$ )	0.6636	0.6804	0.6291
Kappa ( $\kappa$ )	3.0885	1.6446	3.6893
Theta ( $\theta$ )	0.2878	0.2753	0.2506
Volatilidad de la varianza ( $\sigma$ )	0.3561	0.2654	0.3690
Varianza actual ( $V_0$ )	0.0008	0.0291	0.0011
Parte imaginaria de $k(k_i)$	0.4558	0.5382	0.6747
Gamma ( $\gamma$ )	0.1191	0.0857	0.1238

En este caso, el valor de  $\$RFEM$  es de 0.1203, lo que corresponde a un error de aproximadamente \$12, en promedio, entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. El valor de %RFEM es de 0.0439, lo que corresponde a un error de aproximadamente 4.4%, en promedio, entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por último, el valor de RFEMIV es de 0.3912, el cual corresponde a una diferencia de 39% entre las volatilidades implícitas obtenidas de los precios de mercado y las volatilidades implícitas obtenidas del modelo de Heston.

Los cuadros 15 y 16 presentan, respectivamente, los precios de cierre de opciones de compra y de venta de WALMEX-V obtenidos del boletín para cada precio de ejercicio reportado, la volatilidad implícita calculada con el método de bisección y los correspondientes precios estimados con el modelo de Heston junto con las volatilidades implícitas y los valores de cada función de pérdida, además de las volatilidades implícitas que reporta el boletín.

En las gráficas 15 y 16 se examinan los resultados de los cuadros 15 y 16. Nótese que, para opciones de compra, los valores estimados por  $\$RFEM$ ,

CUADRO 15. Precios estimados de opciones de compra con el modelo de Heston con funciones de pérdida para cada precio de ejercicio (K) y sus volatilidades implícitas, y las volatilidades implícitas de mercado

Tipo de opción	Precio de ejercicio	Moneymess (K/S)	Precio de cierre	Vol. imp. B.S.	\$RFEM-V.I.		%RFEM-V.I.		RFEMVI-V.I.		Vol. imp. mdo.
					Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	
Call	28.0	0.826	6.05	0.2088	5.79	NA	5.69	NA	5.78	NA	0.2261
Call	29.0	0.856	5.08	0.2178	4.83	NA	4.72	NA	4.82	NA	0.2222
Call	30.0	0.885	4.14	0.2193	3.91	NA	3.80	NA	3.90	NA	0.2197
Call	31.0	0.915	3.25	0.2179	3.06	0.082	2.96	NA	3.05	NA	0.2185
Call	32.0	0.945	2.44	0.2160	2.32	0.183	2.22	0.155	2.30	0.182	0.2184
Call	33.0	0.974	1.76	0.2183	1.70	0.205	1.61	0.188	1.68	0.204	0.2193
Call	34.0	1.004	1.21	0.2199	1.20	0.218	1.12	0.205	1.19	0.217	0.2213
Call	35.0	1.033	0.80	0.2228	0.83	0.228	0.76	0.217	0.81	0.227	0.2240
Call	36.0	1.063	0.51	0.2260	0.55	0.235	0.50	0.226	0.54	0.234	0.2276
Call	37.0	1.092	0.32	0.2307	0.36	0.242	0.32	0.233	0.35	0.240	0.2319
Call	38.0	1.122	0.20	0.2366	0.23	0.248	0.20	0.239	0.22	0.245	0.2369
Call	39.0	1.151	0.12	0.2405	0.15	0.253	0.12	0.245	0.13	0.249	0.2425
Call	40.0	1.181	0.07	0.2438	0.09	0.257	0.08	0.250	0.08	0.252	0.2486
Call	41.0	1.210	0.05	0.2565	0.06	0.262	0.05	0.254	0.04	0.254	0.2553
Call	42.0	1.240	0.03	0.2607	0.03	0.266	0.03	0.258	0.02	0.253	0.2625
Call	43.0	1.269	0.02	0.2687	0.02	0.269	0.02	0.262	0.01	0.249	0.2701
Call	44.0	1.299	0.01	0.2665	0.01	0.273	0.009	0.265	0.002	0.231	0.2780
Call	45.0	1.328	0.01	0.2867	0.01	0.276	0.005	0.268	0.000	0.063	0.2864
Call	46.0	1.358	0.01	0.3062	0.00	0.278	0.003	0.271	0.000	0.063	0.2951
Call	47.0	1.387	0.01	0.3252	0.00	0.279	0.002	0.272	0.000	0.125	0.3042

FUENTE: elaboración propia.

NA: no aplica.

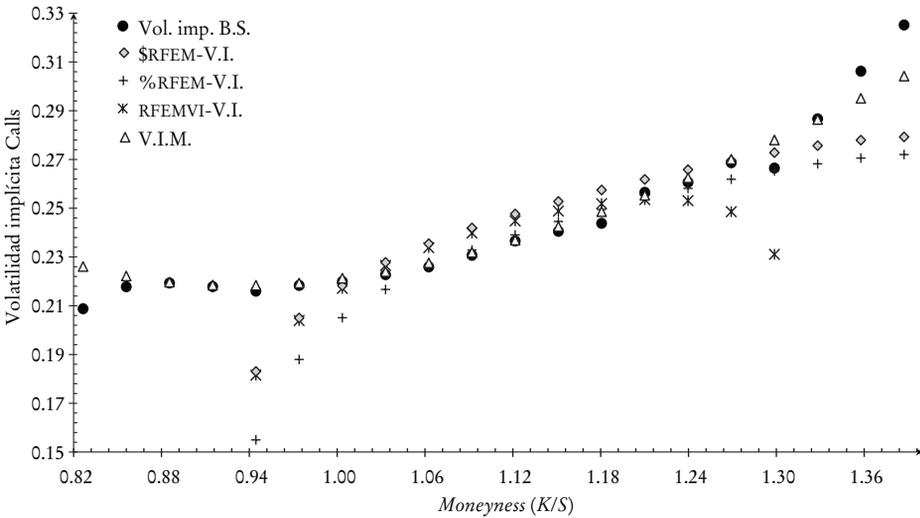
CUADRO 16. Precios estimados de opciones de compra con el modelo de Heston con funciones de pérdida para cada precio de ejercicio (K) y sus volatilidades implícitas, y las volatilidades implícitas de mercado

Tipo de opción	Precio de ejercicio	Moneyness (K/S)	Precio de cierre	Vol. imp. B.S.	\$/RFEM-V.I.		%RFEM-V.I.		RFEMVI-V.I.		Vol. imp. mdo.
					Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	
Put	28.0	0.826	0.04	0.2681	0.01	0.223	0.01	0.222	0.00	0.191	0.2708
Put	29.0	0.856	0.08	0.2606	0.04	0.229	0.04	0.227	0.03	0.221	0.2589
Put	30.0	0.885	0.15	0.2524	0.12	0.236	0.11	0.235	0.11	0.232	0.2523
Put	31.0	0.915	0.28	0.2481	0.26	0.243	0.26	0.242	0.25	0.241	0.2505
Put	32.0	0.945	0.52	0.2518	0.51	0.250	0.52	0.251	0.50	0.249	0.2530
Put	33.0	0.974	0.89	0.2592	0.89	0.258	0.90	0.261	0.87	0.257	0.2594
Put	34.0	1.004	1.40	0.2703	1.39	0.268	1.41	0.272	1.37	0.266	0.2693
Put	35.0	1.033	2.04	0.2849	2.00	0.278	2.04	0.285	1.99	0.277	0.2825
Put	36.0	1.063	2.79	0.3037	2.73	0.291	2.78	0.301	2.71	0.289	0.2987
Put	37.0	1.092	3.62	0.3257	3.53	0.305	3.59	0.319	3.51	0.303	0.3176
Put	38.0	1.122	4.51	0.3516	4.39	0.323	4.47	0.341	4.38	0.321	0.3389
Put	39.0	1.151	5.43	0.3780	5.30	0.343	5.38	0.365	5.29	0.340	0.3626
Put	40.0	1.181	6.38	0.4073	6.24	0.365	6.33	0.392	6.23	0.363	0.3883
Put	41.0	1.210	7.35	0.4388	7.20	0.390	7.292	0.421	7.189	0.387	0.4160
Put	42.0	1.240	8.33	0.4708	8.17	0.416	8.27	0.450	8.16	0.414	0.4455
Put	43.0	1.269	9.33	0.5074	9.15	0.443	9.25	0.480	9.14	0.441	0.4765
Put	44.0	1.299	10.33	0.5425	10.14	0.470	10.24	0.510	10.13	0.468	0.5091
Put	45.0	1.328	11.33	0.5764	11.13	0.498	11.23	0.540	11.12	0.495	0.5431
Put	46.0	1.358	12.34	0.6127	12.12	0.525	12.22	0.568	12.11	0.522	0.5783
Put	47.0	1.387	13.36	0.6516	13.11	0.551	13.214	0.596	13.102	0.549	0.6148

FUENTE: elaboración propia.

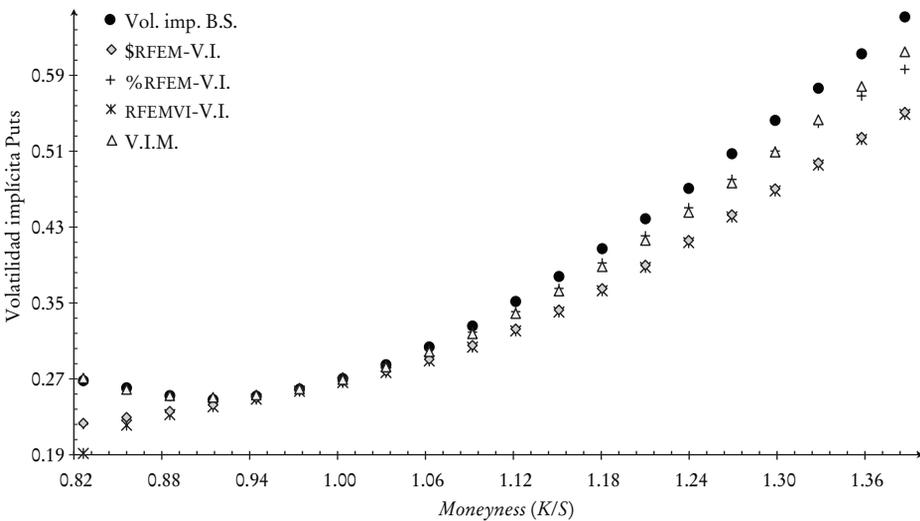
NA: no aplica.

GRÁFICA 15. Comparación entre volatilidades implícitas estimadas para opciones de compra y volatilidades implícitas de mercado



FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 16. Comparación entre volatilidades implícitas estimadas para opciones de venta y volatilidades implícitas de mercado



FUENTE: elaboración propia.

%RFEM y RFEMIV producen volatilidades implícitas que, en general, están alejadas de las volatilidades implícitas del mercado en todos los niveles de moneyness. Para opciones de venta y dentro-del-dinero el ajuste más próximo es para %RFEM. Con respecto del parámetro de correlación, éste resultó positivo para cada función de pérdida, lo cual implica que la densidad del subyacente tiene sesgo positivo.

### 3. Calibración para opciones sobre GMEXICO-B

El cuadro 17 muestra datos relevantes para la calibración de los parámetros de las opciones sobre GMEXICO-B:

CUADRO 17. *Parámetros relevantes*

<i>Fecha actual</i>	<i>Fecha de vencimiento</i>	<i>Plazo al vencimiento</i>	<i>Tasa libre de riesgo</i>	<i>Precio spot GMEXICO-B</i>
25/10/2013	20/12/2013	0.155556	0.037493	41.55

El cuadro 18 muestra un resumen de los valores de las funciones de pérdida y los valores estimados de los parámetros del modelo de Heston para cada función de pérdida.

CUADRO 18. *Resumen de las funciones de pérdida con los correspondientes valores de los parámetros estimados del modelo de Heston con la transformada de Lewis*

	<i>\$RFEM</i>	<i>%RFEM</i>	<i>RFEMIV</i>
Valor de la función de pérdida	0.0872	0.0411	0.0125
Rho ( $\rho$ )	-0.4807	-0.6254	-0.4081
Kappa ( $\kappa$ )	4.1303	2.6098	2.8367
Theta ( $\theta$ )	0.1550	0.2150	0.2467
Volatilidad de la varianza ( $\sigma$ )	0.5897	0.4796	0.4858
Varianza actual ( $V_0$ )	0.0797	0.0756	0.0635
Parte imaginaria de $k(k_i)$	0.6040	0.4036	0.5277
Gamma ( $\gamma$ )	0.0615	0.0927	0.0983

La interpretación de los valores de las funciones de pérdida es como sigue. El valor de \$RFEM es de 0.0872, lo que corresponde a un error de aproximadamente 9 centavos entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por su parte, el valor de %RFEM es de 0.0411, lo cual corresponde a un error de aproximadamente 4.1% en promedio entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por último, el valor de RFEMIV es de 0.0125, el cual corresponde

a una diferencia de 1.25% entre las volatilidades implícitas obtenidas de los precios de mercado y las volatilidades implícitas obtenidas con el modelo de Heston.

El cuadro 19 muestra los precios de cierre de opciones de compra y venta de GMEXICO-B obtenidos del brmo, la volatilidad implícita calculada con el método de bisección y los correspondientes precios estimados con el modelo de Heston junto con las volatilidades implícitas y los valores de las funciones de pérdida, además de las volatilidades implícitas que reporta el boletín.

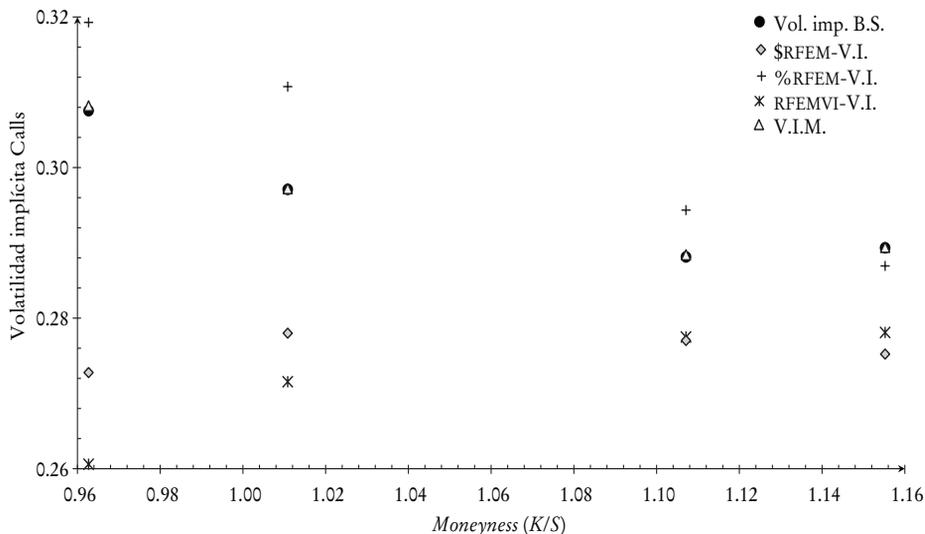
CUADRO 19. Precios estimados con el modelo de Heston con las funciones de pérdida y volatilidades implícitas

Tipo de opción	Precio de ejercicio	Moneyness (K/S)	Precio de cierre	Vol. imp. B.S.	\$RFEM-V.I.		%RFEM-V.I.		RFEMVI-V.I.		Vol. imp. mdo.
					Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	
Put	38.0	0.915	0.72	0.3368	0.78	0.347	0.71	0.334	0.72	0.337	0.336
Put	40.0	0.963	1.31	0.3276	1.41	0.343	1.29	0.325	1.41	0.345	0.326
Put	42.0	1.011	2.24	0.3280	2.34	0.342	2.16	0.316	2.37	0.348	0.324
Put	44.0	1.059	3.51	0.3367	3.58	0.347	3.33	0.308	3.64	0.358	0.331
Put	46.0	1.107	5.07	0.3559	5.10	0.359	4.79	0.301	5.18	0.375	0.345
Put	48.0	1.155	6.81	0.3817	6.82	0.382	6.47	0.297	6.91	0.403	0.365
Put	50.0	1.203	8.68	0.4187	8.68	0.416	8.30	0.296	8.77	0.440	0.390
Call	40.0	0.963	2.97	0.3076	2.78	0.273	3.04	0.319	2.69	0.261	0.308
Call	42.0	1.011	1.83	0.2971	1.72	0.278	1.92	0.311	1.66	0.272	0.297
Call	46.0	1.107	0.54	0.2881	0.50	0.277	0.57	0.294	0.49	0.277	0.288
Call	48.0	1.155	0.27	0.2893	0.23	0.275	0.26	0.287	0.23	0.278	0.289

En las gráficas 17 y 18 se muestran los resultados obtenidos en el cuadro 19. Obsérvese que, para opciones de compra, los valores estimados de %RFEM producen volatilidades implícitas que están razonablemente cerca de las volatilidades implícitas del mercado en todos los niveles de moneyness, mientras que los valores estimados por \$RFEM y RFEMVI producen volatilidades implícitas que están alejadas de las volatilidades implícitas del mercado. Para opciones de venta muy dentro-del-dinero el mejor ajuste se obtiene con \$RFEM.

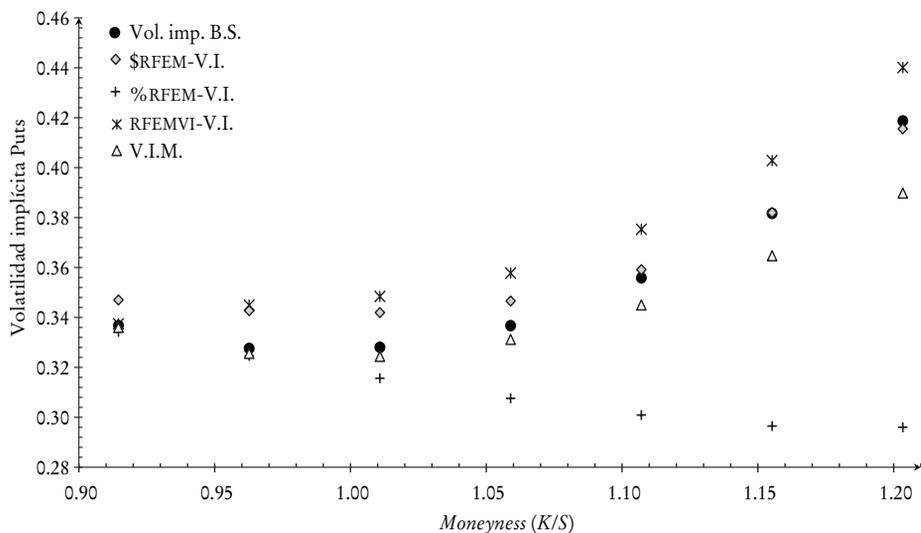
En las gráficas 19 y 20 se muestran los precios de mercado en comparación con los obtenidos con las funciones de pérdida. Obsérvese que, para opciones de compra los valores estimados por %RFEM son los más cercanos a los publicados por el boletín de MexDer. Para opciones de venta los valores estimados por \$RFEM y RFEMVI producen precios muy cercanos a los publi-

GRÁFICA 17. *Volatilidades implícitas de opciones de compra obtenidas de las funciones de pérdida*



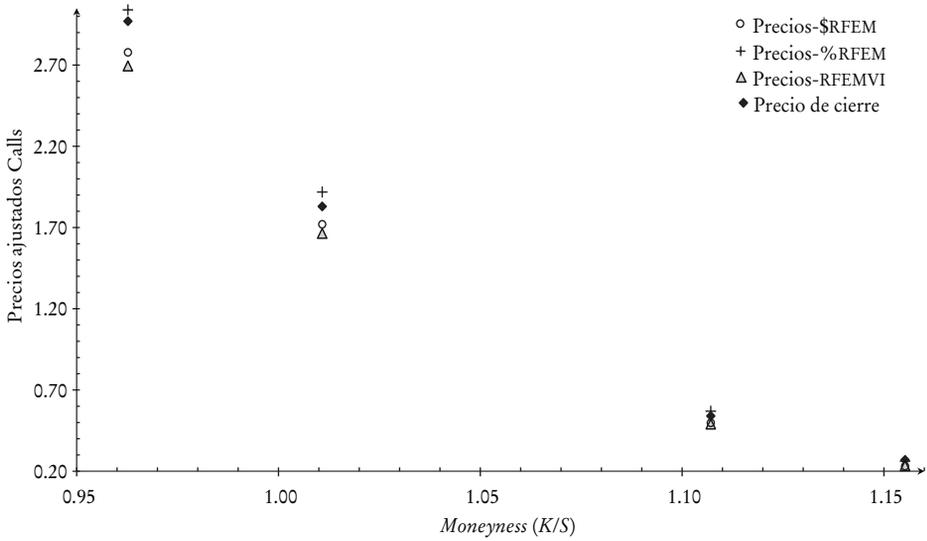
FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 18. *Volatilidades implícitas de opciones de venta obtenidas de las funciones de pérdida*



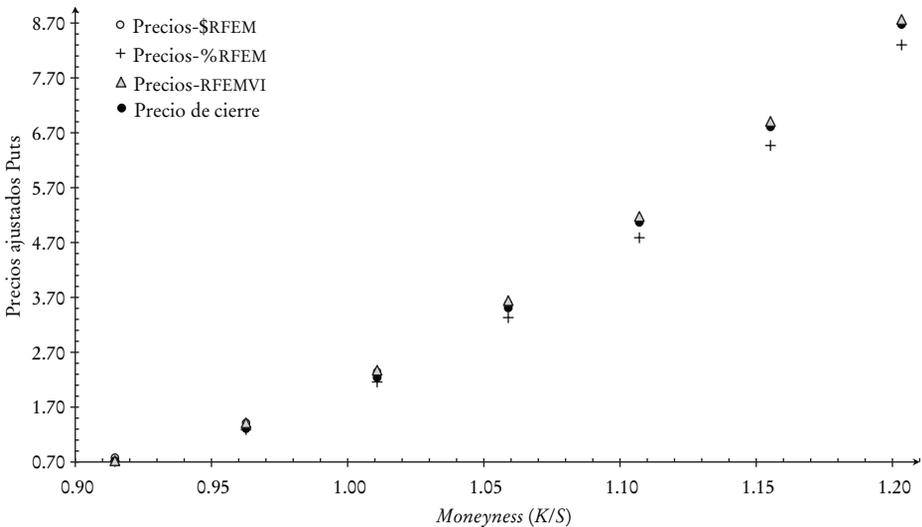
FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 19. Comparación entre precios estimados de opciones de compra y precios de mercado



FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 20. Comparación entre precios estimados de opciones de venta y precios de mercado



FUENTE: elaboración propia.

cados en el boletín. Es importante mencionar que, en el caso de opciones de compra, se tienen cuatro precios de los cuales sólo uno está dentro-del-dinero y de los siete precios de opciones de venta cinco están dentro-del-dinero.

Para analizar la eficiencia de la calibración en el caso de %RFEM se hace la valuación pero sólo para opciones cuyo precio de liquidación es mayor a \$0.50, además de que, del resumen del boletín para opciones de compra, solamente hay una con  $K = 40$  que está dentro-del-dinero de las cuatro, y para opciones de venta cinco de las siete están dentro-del-dinero. Los resultados se muestran a continuación:

CUADRO 20. *Resumen de las funciones de pérdida con los correspondientes valores ajustados de los parámetros estimados del modelo de Heston con la transformada de Lewis*

	$\$RFEM$	%RFEM	RFEMVI
Valor de la función de pérdida	0.1884	0.0369	0.4647
Rho ( $\rho$ )	-0.4807	-0.6254	-0.4081
Kappa ( $\kappa$ )	4.1303	2.6098	2.8367
Theta ( $\theta$ )	0.1550	0.2150	0.2467
Volatilidad de la varianza ( $\sigma$ )	0.5897	0.4796	0.4858
Varianza actual ( $V_0$ )	0.0797	0.0756	0.0635
Parte imaginaria de $k(k_i)$	0.6040	0.4036	0.5277
Gamma ( $\gamma$ )	0.0615	0.0927	0.0983

FUENTE: elaboración propia.

La interpretación de los valores de las funciones de pérdida es como sigue. El valor de \$RFEM es de 0.1884, lo que corresponde a un error de aproximadamente \$19, en promedio, entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por su parte, el valor de %RFEM es de 0.0369, lo que corresponde a un error de aproximadamente 3.7% entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por último, el valor de RFEMIV es de 0.4647, que corresponde a una diferencia de aproximadamente 46% entre las volatilidades implícitas obtenidas de los precios de mercado y las volatilidades implícitas obtenidas con el modelo de Heston.

Los cuadros 21 y 22 muestran respectivamente los precios de cierre de opciones de compra y de venta de GMEXICO-B, obtenidos del boletín para cada precio de ejercicio reportado, la volatilidad implícita calculada con el método de bisección y los correspondientes precios estimados con el modelo de Heston, junto con las volatilidades implícitas y los valores de las

CUADRO 21. Precios estimados de opciones de compra con el modelo de Heston con funciones de pérdida para cada precio de ejercicio ( $K$ ) y sus volatilidades implícitas, y las volatilidades implícitas de mercado

Tipo de opción	Precio de ejercicio	Moneyness ( $K/S$ )	Precio de cierre	Vol. imp. B.S.	$\$RFEM-V.I.$		$\%RFEM-V.I.$		$RFEMVI-V.I.$		Vol. imp. mdo.
					Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	
Call	30.0	0.722	11.80	0.4508	11.33	n.d.	11.71	n.d.	n.d.	11.42	0.4616
Call	32.0	0.770	9.86	0.4122	9.39	n.d.	9.76	0.326	0.326	9.47	0.4140
Call	34.0	0.818	7.95	0.3738	7.51	n.d.	7.87	0.337	0.337	7.57	0.3762
Call	36.0	0.866	6.12	0.3446	5.73	n.d.	6.08	0.334	0.334	5.79	0.3468
Call	38.0	0.915	4.43	0.3218	4.13	0.254	4.44	0.327	0.327	4.17	0.3244
Call	40.0	0.963	2.97	0.3051	2.78	0.273	3.04	0.319	0.319	2.81	0.3082
Call	42.0	1.011	1.83	0.2948	1.72	0.278	1.92	0.311	0.311	1.75	0.2972
Call	44.0	1.059	1.03	0.2881	0.97	0.278	1.10	0.302	0.302	1.01	0.2908
Call	46.0	1.107	0.54	0.2860	0.50	0.277	0.57	0.294	0.294	0.53	0.2884
Call	48.0	1.155	0.27	0.2872	0.23	0.275	0.26	0.287	0.287	0.26	0.2894
Call	50.0	1.203	0.13	0.2899	0.10	0.273	0.107	0.280	0.280	0.114	0.2936
Call	52.0	1.252	0.07	0.3004	0.04	0.272	0.038	0.274	0.274	0.048	0.3005
Call	54.0	1.300	0.04	0.3127	0.01	0.269	0.011	0.266	0.266	0.019	0.3098
Call	56.0	1.348	0.02	0.3180	0.00	0.263	0.002	0.250	0.250	0.007	0.3212

FUENTE: elaboración propia.

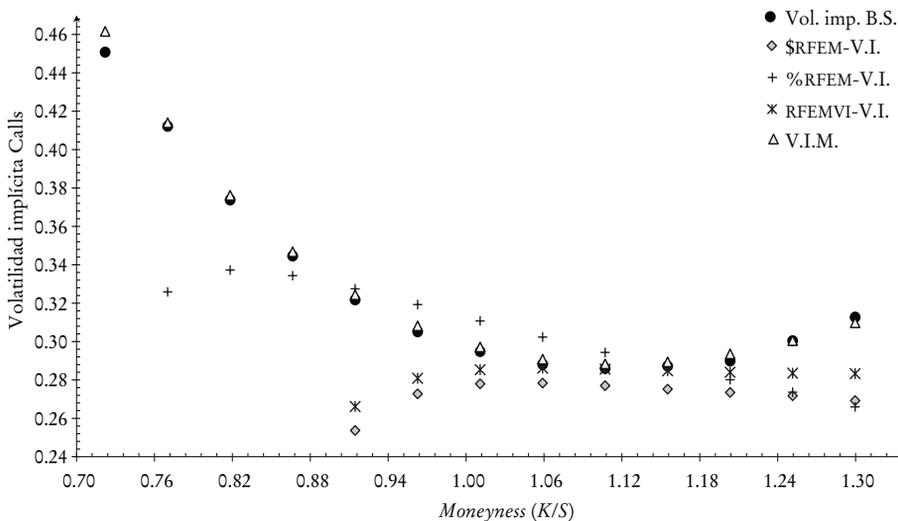
n.d.: no aplica.

CUADRO 22. Precios estimados de opciones de venta con el modelo de Heston con funciones de pérdida para cada precio de ejercicio ( $K$ ) y sus volatilidades implícitas, y las volatilidades implícitas de mercado

Tipo de opción	Precio de ejercicio	Moneyness ( $K/S$ )	Precio de cierre	Vol. imp. B.S.	$\$RFEM-V.I.$		$\%RFEM-V.I.$		$RFEMVI-V.I.$		Vol. imp. mdo.
					Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	Precios	$\sigma_{vi}$	
Put	30.0	0.722	0.14	0.5056	0.02	0.379	0.02	0.375	0.02	0.364	0.5054
Put	32.0	0.770	0.16	0.4349	0.07	0.370	0.06	0.363	0.05	0.356	0.4393
Put	34.0	0.818	0.24	0.3902	0.18	0.362	0.16	0.352	0.15	0.349	0.3908
Put	36.0	0.866	0.40	0.3562	0.39	0.354	0.35	0.342	0.35	0.342	0.3571
Put	38.0	0.915	0.72	0.3346	0.78	0.347	0.71	0.332	0.72	0.337	0.3360
Put	40.0	0.963	1.31	0.3256	1.41	0.343	1.29	0.323	1.35	0.334	0.3256
Put	42.0	1.011	2.24	0.3261	2.34	0.342	2.16	0.314	2.28	0.334	0.3244
Put	44.0	1.059	3.51	0.3348	3.58	0.347	3.332	0.306	3.520	0.338	0.3312
Put	46.0	1.107	5.07	0.3540	5.10	0.359	4.79	0.299	5.03	0.349	0.3450
Put	48.0	1.155	6.81	0.3798	6.82	0.382	6.47	0.295	6.75	0.368	0.3647
Put	50.0	1.203	8.68	0.4167	8.68	0.416	8.30	0.296	8.59	0.396	0.3898
Put	52.0	1.252	10.60	0.4561	10.60	0.457	10.22	0.303	10.52	0.433	0.4194
Put	54.0	1.300	12.56	0.5003	12.57	0.503	12.18	0.321	12.48	0.475	0.4531
Put	56.0	1.348	14.54	0.5466	14.55	0.549	14.163	0.347	14.453	0.518	0.4905

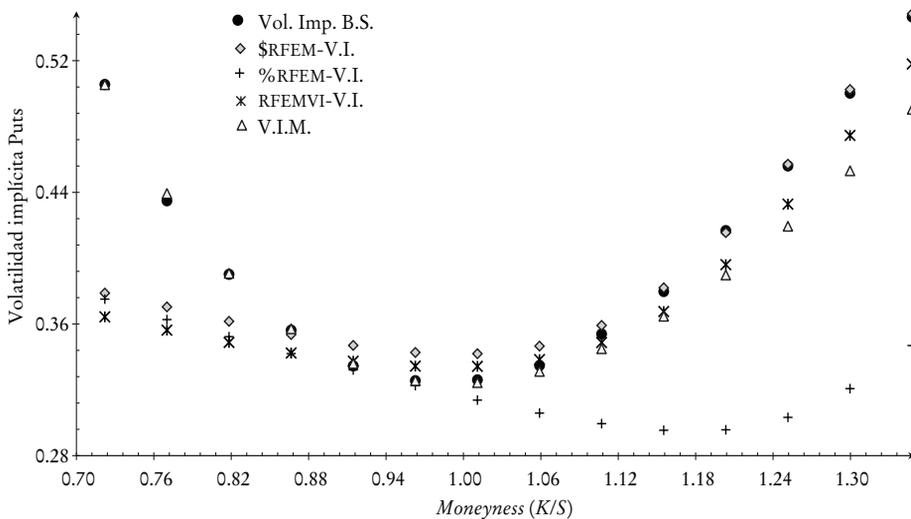
FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 21. Comparación entre volatilidades implícitas estimadas para opciones de compra y volatilidades implícitas de mercado



FUENTE: elaboración propia.

GRÁFICA 22. Comparación entre volatilidades implícitas estimadas para opciones de venta y volatilidades implícitas de mercado



FUENTE: elaboración propia.

funciones de pérdida, además de las volatilidades implícitas que reporta el boletín.

En las gráficas 21 y 22 se muestran los resultados obtenidos de los cuadros anteriores. Se observa que, para opciones de compra fuera del dinero, los valores estimados por RFEMVI producen volatilidades implícitas muy cercanas a las del mercado. Para opciones de compra dentro-del-dinero y hasta  $K = 36$  los valores estimados por %RFEM producen volatilidades implícitas muy cercanas a las del mercado. Para opciones de venta y dentro-del-dinero el mejor ajuste se obtiene con RFEMVI. Con respecto del parámetro de correlación, éste resultó negativo en todos los casos, lo cual implica que la densidad del subyacente tiene sesgo negativo.

### CONCLUSIONES

En esta investigación se discutieron las características teóricas del modelo de Heston (1993). Este modelo extiende el modelo BSM al suponer que la volatilidad del precio del subyacente es conducida por un proceso de difusión, además de incluir una correlación arbitraria entre la volatilidad y los rendimientos del subyacente. A partir de la función de densidad marginal obtenida por Dragulescu y Yakovenko (2002), y con parámetros dados, se analizó dicha densidad. Se concluye que el parámetro de correlación modela el sesgo de la densidad. La correlación positiva proviene de una alta volatilidad al aumentar el precio del subyacente, lo cual se refleja en la cola derecha de la densidad. Por su parte, una correlación negativa está asociada con una baja volatilidad; mientras que el parámetro de volatilidad de la varianza modela la curtosis de la densidad, lo cual produce colas pesadas. Estas características impactan en los precios de opciones según sea la relación entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio.

Por medio de tres funciones de pérdida se calibraron los parámetros del modelo de Heston a un conjunto de precios de opciones de compra y de venta sobre acciones de AMX-L, WALMEX-V y GMEXICO-B, los cuales se reportan en el resumen del mercado de opciones negociadas que se publicó en la página de MexDer el 25 de octubre de 2013. En cada caso se determinaron precios de opciones de compra y de venta, así como las volatilidades implícitas que se utilizaron para cada función de pérdida mediante el método de bisección.

En el caso de AMX-L, resultó que para opciones de compra los valores obtenidos por la raíz de función de pérdida del error cuadrático medio de

volatilidad implícita RFEMVI producen volatilidades implícitas que son consistentes con las observadas en el mercado, es decir, los dos conjuntos de volatilidades son de magnitud similar en todos los niveles de *moneyness*, mientras que los valores estimados por la raíz de la función de pérdida del error cuadrático medio \$RFEM y la raíz de la función de pérdida relativa del error cuadrático medio %RFEM produjeron volatilidades implícitas, las cuales en su mayoría están alejadas de las del mercado. Para opciones de venta el mejor ajuste se obtiene con %RFEM.

Para opciones de compra sobre WALMEX-V y GMEXICO-B, resultó que los valores obtenidos por %RFEM producen volatilidades implícitas que están razonablemente cerca de las volatilidades implícitas del mercado en todos los niveles de *moneyness*, mientras que los valores estimados por \$RFEM y RFEMVI producen volatilidades implícitas que están alejadas de las del mercado. Para opciones de venta en-el-dinero sobre WALMEX-V el mejor ajuste se obtuvo con \$RFEM y RFEMVI. Para opciones de venta muy dentro-del-dinero, las volatilidades implícitas generadas por %RFEM son las más cercanas a las del mercado. Para opciones de venta muy dentro-del-dinero sobre GMEXICO-B el ajuste más cercano es para \$RFEM.

En cuanto al parámetro de correlación para AMX-L y GMEXICO-B, éste resultó negativo para cada función de pérdida, lo cual implica que la densidad del subyacente tiene sesgo negativo, mientras que para WALMEX-V resultó positivo para cada función de pérdida, lo cual implica que la densidad del subyacente tiene sesgo positivo. Posteriormente, se examinó la eficiencia de los parámetros calibrados. Para ello, se determinaron las volatilidades implícitas de opciones de compra y de venta de todos los precios de ejercicio reportados en el boletín de opciones. Para opciones de compra sobre AMX-L y WALMEX-V, los valores estimados por \$RFEM, %RFEM y RFEMVI producen volatilidades implícitas que están alejadas de las volatilidades implícitas del mercado en todos los niveles de *moneyness*. Para opciones de venta y fuera del dinero sobre AMX-L, el mejor ajuste se obtiene con %RFEM. Para opciones de venta y dentro-del-dinero sobre WALMEX-V, el ajuste más cercano es para %RFEM. Para opciones de compra fuera del dinero sobre GMEXICO-B se tiene que los valores estimados por RFEMVI producen volatilidades implícitas muy cercanas a las del mercado. Por último, para opciones de venta y dentro-del-dinero el mejor ajuste se obtiene con RFEMVI.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bakshi, G., C. Cao, y Z. Chen (1997), "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models", *Journal of Finance*, vol. 52, núm. 5, pp. 2003-2049.
- Bates, D. (1996), "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes in Deutschemark Options", *Review of Financial Studies*, vol. 9, núm. 1, pp. 69-108.
- Black, F., y M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, vol. 81, núm. 3, pp. 637-654.
- Breeden, D. T. (1979), "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", *Journal of Financial Economics*, vol. 7, pp. 265-296.
- Čížek, P., W. K. Härdle y R. Weron (eds.) (2011), *Statistical Tools for Finance and Insurance*, 2a ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll y S. A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, vol. 53, núm. 2, pp. 385-407.
- Dragulescu, A. A., y V. M. Yakovenko (2002), "Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility", *Quantitative Finance*, vol. 2, núm. 6, pp. 443-453.
- Duffie, D., Pan, J., y K. Singleton, (2000), "Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions", *Econometrica*, vol. 68, núm. 6, pp. 1343-1376.
- Gatheral, J. (2006), *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Harvey, A., E. Ruiz, y N. Shephard, (1994), "Multivariate stochastic variance models", *Review of Economic Studies*, vol. 61, núm. 2, pp. 247-264.
- Heston, S. I. (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, vol. 6, núm. 2, pp. 327-343.
- Heston, S., y S. Nandi (2000), "A Closed-Form GARCH Option Pricing Model", *Review of Financial Studies*, vol. 13, pp. 585-626.
- Hull, J., y A. White (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility", *Journal of Finance*, vol. 42, núm. 2, pp. 281-300.
- Lagarias, J. C., J. A. Reeds, M. H. Wright, y P. E. Wright (1999), "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions", *SIAM Journal of Optimization*, vol. 9, núm. 1, pp. 112-147.
- Lewis, A. L. (2000), *Option Valuation under Stochastic Volatility: with Mathematica Code*, Newport Beach, Calif., Finance Press.
- Longstaff, F. (1989), "A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, vol. 23, núm. 2, pp. 195-224.
- Merton, R. C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, núm. 1, pp. 141-183.

- Merton, R. C. (1976), "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, vol. 3, núm. 1-2, pp. 125-144.
- Shephard, Neil, (2005), *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford University Press, Nueva York.
- Schöbel, R., y J.W. Zhu (1999), "Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: an extension", *European Finance Review*, vol. 3, núm. 1, pp. 23-46.
- Stein, E. M., y J. C. Stein (1991), "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", *Review of Financial Studies*, vol. 4, núm. 4, pp. 727-752.
- Zhu, J. (2010), *Applications of Fourier Transform to Smile Modeling: Theory and Implementation*, 2ª ed., Springer Finance Series, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.