

## LA CÓPULA GED BIVARIADA

### Una aplicación en entornos de crisis\*

*Alfonso Mendoza Velázquez  
y Evalds Galvanovskis\*\**

#### RESUMEN

Mientras que la distribución de error general (GED) ha sido usada extensamente en aplicaciones de series de tiempo y ha demostrado una gran flexibilidad en la estimación de series de tiempo financieras, no se ha intentado utilizarla en la construcción de cópulas. Las cópulas son funciones de probabilidad que unen una función de distribución multivariada a funciones de distribución univariadas llamadas marginales. Se parte del supuesto de que las marginales son continuas y uniformes en el intervalo  $[0,1]$ . En este artículo proponemos la cópula GED bivariada, la cual, de acuerdo con nuestra revisión, no ha sido usada en la bibliografía. Esta función abarca otras funciones de distribución, como la gaussiana o la doble exponencial, empleadas frecuentemente en el análisis de fenómenos financieros. Con el fin de probar el desempeño de esta nueva cópula investigamos el contagio financiero en la crisis de 2008 empleando tipos de cambio, acciones, bonos y mercados de deuda soberana en América Latina. Los criterios usuales de decisión proveen fuerte evidencia a favor de la cópula GED sobre otras alternativas elípticas o arquimideanas.

\* *Palabras clave:* distribución GED, cópula, distribución bivariada, contagio, mercados financieros, GARCH. *Clasificación JEL:* C22, C46, C52, C65. Artículo recibido el 1º de julio de 2013 y aceptado el 3 de octubre de 2013. A. Mendoza Velázquez agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) el apoyo recibido del fondo para jóvenes investigadores.

\*\* A. Mendoza Velázquez, Centro de Investigación e Inteligencia Económica (CIEE), Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla (UPAEP) (correo electrónico: alfonso.mendoza@upaep.mx). E. Galvanovskis, Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi).

## ABSTRACT

The General Error Distribution (GED) has been extensively used in time series econometrics applications, due to its great flexibility in the estimation of financial stylized facts. However, there has been no attempt to employ this statistical distribution in the construction of copulas. Copulas are probability functions that link one multivariate distribution to univariate distribution functions called marginals. These marginals are continuous and follow a uniform behavior within  $[0,1]$ . In this paper we introduce the bivariate GED copula to investigate financial contagion in Latinamerica during the 2008 crisis. We examine contagion in foreign exchange, equity, bonds and sovereign markets in Latinamerica. Standard decision criteria provide strong evidence in favor of the GED copula, against other widely used elliptical and arquimidean alternatives.

## INTRODUCCIÓN

La aplicación empírica de cópulas en la economía y las finanzas ha experimentado un gran crecimiento en la última década —para una revisión detallada véase Patton (2009) y para una crítica interesante véase Mikosch (2006)—. Practicantes y académicos que buscan medidas alternativas de riesgo y asociación, en las que se involucran dos o más variables, se han visto fuertemente atraídos hacia ellas. Las cópulas han sido útiles en el análisis de riesgos y en la valoración de productos derivados como opciones, *swaps* y notas estructuradas;<sup>1</sup> también son una propuesta original en la investigación de contagio financiero<sup>2</sup> y en la administración de riesgos.<sup>3</sup> El concepto de cópulas condicionales ya se ha integrado exitosamente en aplicaciones de series de tiempo financieras, como lo muestra Patton (2006).

La distribución multivariada más usada para unir dos marginales es la distribución normal (*e.g.*, Chen y Fan, 2006) utilizan la cópula normal constante. Otros autores han usado distribuciones alternativas como la *t* de Student o la normal mixta para captar de forma más natural la asociación entre las marginales (véanse Rodríguez, 2007, y Patton, 2006).

<sup>1</sup> Véase Cherubini *et al.* (2004) para aplicaciones de cópulas en matemáticas financieras y productos financieros derivados.

<sup>2</sup> Para métodos con cópulas en el estudio de contagio véanse Rodríguez (2007), Chollete *et al.* (2005) y Arakelian y Dellaportas (2005).

<sup>3</sup> Comenzando con Hull y White (1998), el trabajo en esta área se concentra en el análisis VaR. Contribuciones recientes a este campo y al manejo de riesgos se ven en Embrechts y Höing (2006) y Alexander (2008).

La cópula propuesta es una suposición sobre el comportamiento de la dependencia entre las marginales; los investigadores escogen la cópula de acuerdo a las características empíricas y a la aplicación disponible (asimetrías, persistencia, colas anchas, etc.). Para elegir la “mejor” función deben ajustarse las diferentes cópulas y luego usar criterios de elección estándar. Como en general éstas son funciones no anidadas, el proceso de elección no garantiza que la cópula escogida sea la mejor alternativa. Por lo tanto es recomendable contar con una distribución que permita captar el ancho de las colas de manera más natural, para poder modelar otras características y probar alternativas de cópulas anidadas.

En este trabajo proponemos una nueva función de distribución que, según nuestro conocimiento, no ha sido usada hasta ahora en la bibliografía de cópulas: la cópula bivariada de la distribución de error general (GED). La distribución GED, también denominada como *power exponential distribution* en la bibliografía,<sup>4</sup> ha sido usada extensamente en aplicaciones univariadas de series de tiempo financieras y ha demostrado gran flexibilidad en el proceso de estimación. En nuestro trabajo partimos del supuesto de normalidad y permitimos al investigador estimar de manera directa la distribución final. Efectivamente, otra ventaja de la nueva cópula GED es que, además de la distribución normal, pueden replicarse un rango de distribuciones anidadas tan sólo restringiendo sus parámetros.

La principal contribución de nuestro trabajo es la proposición de la nueva cópula bivariada GED. Para probar la bondad de ajuste y su desempeño estadístico, en relación con otras distribuciones, examinamos el riesgo de contagio financiero en América Latina durante la crisis financiera de 2008-2009 en diferentes mercados: de deuda soberana, acciones, bonos y tipos de cambio. Asimismo, examinamos el riesgo de contagio entre los Estados Unidos y México antes y durante la crisis de 2008.

Estos casos de estudio son muy relevantes debido a que constituyen una muestra de los países emergentes más afectados durante la reciente crisis; el riesgo de contagio se extendió rápidamente a través de los distintos canales financieros entre los países de América Latina y en particular desde los Estados Unidos. El enfoque de cópulas permite precisamente examinar la influencia de las crisis sobre los mercados financieros de estos países desde un ángulo específico de asociación no lineal, y a su vez capta fenómenos

<sup>4</sup> Véase Gómez *et al.* (1998) y Lindsey (2001).

como el ancho de las colas y la persistencia de los riesgos, características documentadas ampliamente en la bibliografía. En general, encontramos que para el análisis de contagio de las crisis la nueva cópula GED no sólo provee un mejor ajuste sino una mejor caracterización de la transmisión de la volatilidad, la persistencia y las colas pesadas de estos fenómenos financieros.

La siguiente sección presenta la teoría básica de las cópulas y los elementos que dan soporte a nuestra propuesta de la cópula GED. La sección II introduce la nueva cópula, en la sección III se estima la cópula y se prueba su bondad de ajuste con aplicaciones a diferentes mercados financieros en América Latina, y por último, se presenta las conclusiones.

## I. CÓPULAS

Los métodos comunes para medir la asociación entre variables aleatorias hacen suposiciones fuertes sobre las variables y sobre la naturaleza de la asociación, como la linealidad y la normalidad de la distribución conjunta, pero también de las distribuciones individuales. Se ha documentado ampliamente que muchas variables, incluidas las financieras, no se distribuyen normalmente y que éstas muestran en realidad colas anchas y una mayor persistencia (véanse Hogg y Klugman, 1984, y Longin y Solnik, 2001).

Otros problemas relacionados con las medidas comunes de asociación lineal tienen que ver con la invarianza a transformaciones no lineales, que implica que bajo ciertas transformaciones la medida lineal de correlación cambiará y que las violaciones al supuesto de normalidad tienden a sobreestimar los resultados; esto puede suceder, por ejemplo, cuando la distribución real tiene colas más anchas.

Estos problemas se evitan con el uso de cópulas, pues estas funciones son invariantes a transformaciones crecientes, lineales o no lineales, y debido a que la estructura de la dependencia está separada de las distribuciones marginales (véase Nelsen, 1999). Estas funciones se originaron en la década de los años cincuenta, pero ganaron popularidad en la economía y las finanzas en las últimas décadas.<sup>5</sup>

Una cópula es una función de probabilidad conjunta que une una distri-

<sup>5</sup> Para las primeras contribuciones, véase Hoeffding W. (1940, 1941). Sklar A. (1959) fue el primer autor en usar el término cópula. Entre las primeras aplicaciones de las cópulas a las finanzas y a la economía están Tibiletti (1995) y Joe y Taizhong (1996); para contribuciones más recientes, véanse Patton (2006 y 2009) y Embrechts (2009).

bución multivariada a distribuciones marginales univariadas, que se comportan uniformemente en el intervalo  $[0,1]$  (Nelsen, 1999, p. 1). Las cópulas pueden ser multivariadas, aunque en este trabajo nos concentramos en el tipo bivariado para facilitar el análisis.

Una cópula es una función  $C: \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ , en la que  $\mathbf{I}=[0,1]$ ,<sup>6</sup> con las siguientes propiedades:

$$C(u,0) = C(0,u) = 0 \tag{1}$$

$$C(u,1) = C(1,u) = u \tag{2}$$

Y para cada  $u_1, u_2, v_1, v_2$  en  $\mathbf{I}$  donde  $u_1 \leq u_2$  y  $v_1 \leq v_2$ ,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \tag{3}$$

Un principio importante en la teoría de cópulas es el teorema de Sklar. Este teorema se constituye como el fundamento de las medidas de dependencia y asociación entre variables, puesto que describe la manera en que se relaciona la distribución multivariada con las marginales univariadas. El teorema de Sklar indica que si  $H$  es una función de distribución conjunta y  $F$  y  $G$  son sus distribuciones marginales, entonces existe una función cópula tal que:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \tag{4}$$

Si  $F$  y  $G$  son continuas,  $C$  es única; de otra forma  $C$  es única en  $RanF \times RanG$ .

Las distribuciones marginales univariadas tienen la siguiente forma:

$$\text{si } DomF = S_1, \quad F(x) = H(x, b_2) \tag{5}$$

$$\text{si } DomG = S_2, \quad G(y) = H(b_1, y) \tag{6}$$

en las que  $b_1$  es el mayor elemento de  $S_1$  y  $b_2$  es el mayor elemento de  $S_2$ .  $H$  es una función de distribución conjunta de  $\mathbf{R}^2$  a  $\mathbf{I}$ , por lo que  $F$  y  $G$  son funciones de distribución de  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{I}$ .

Si  $F$  y  $G$  son funciones continuas, del teorema de Sklar se deduce la si-

<sup>6</sup> Esto significa que la función  $C$  tiene dos variables, cuyos valores y resultado se encuentran en el intervalo  $[0,1]$ . Para más detalles sobre la notación, véase Simon y Blume (1994).

guiente fórmula, útil para construir cópulas a partir de funciones de distribución bivariadas:

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \quad (7)$$

en la que  $F^{-1}$  y  $G^{-1}$  son las funciones inversas de  $F$  y  $G$  respectivamente.

Las cópulas son invariantes a transformaciones estrictamente crecientes de sus marginales. También, si  $\alpha$  es una transformación estrictamente creciente y  $\beta$  es una transformación estrictamente decreciente, entonces:

$$C_{\alpha(x)\beta(y)}(u, v) = u - C_{xy}(u, 1 - v) \quad (8)$$

De manera similar, si  $\alpha$  es una transformación estrictamente decreciente y  $\beta$  es una transformación estrictamente creciente, entonces:

$$C_{\alpha(x)\beta(y)}(u, v) = v - C_{xy}(1 - u, v) \quad (9)$$

Si  $\alpha$  y  $\beta$  son estrictamente decrecientes, entonces:

$$C_{\alpha(x)\beta(y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{xy}(1 - u, 1 - v) \quad (10)$$

Las pruebas para (8), (9) y (10) se pueden encontrar en Nelsen (1999, p. 22).

Existen muchas clases de cópulas, entre las más populares están las arquimideanas y las elípticas. A continuación describimos brevemente ambas clases debido a que serán éstas las alternativas con las que competirá la propuesta de cópula GED en este artículo.

### 1. *Cópulas arquimideanas*

La popularidad de las cópulas arquimideanas ha crecido debido a que son fáciles de generar y manipular. Esta clase de funciones se caracteriza porque son creadas a partir de una función generadora. El generador  $\varphi$  es una función estrictamente decreciente de  $I$  a  $[0, \infty]$  y  $\varphi(1) = 0$ , con la cópula arquimideana, definida como:

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (11)$$

en la que  $\varphi^{-1}$  es la inversa de  $\varphi$ .

Las dos cópulas arquimideanas más usadas son la cópula Gumbel y la Clayton. La cópula Gumbel y su generador se definen como:

$$C(u, v) = \exp(-((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta}), \quad \phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1) \quad (12)$$

La cópula Clayton y su generador se definen a continuación:

$$C(u, v) = \max((u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0), \quad \phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1) \quad (13)$$

Estas cópulas han sido aplicadas en la bibliografía por Fantazzini (2004) para investigar la estructura de la dependencia de acciones usando la Tau de Kendall, y por Shemyakin *et al.* (2006) para modelar distribuciones conjuntas de supervivencia.

### 2. Cópulas elípticas

La cópula gaussiana y la cópula *t* de Student son las cópulas elípticas más conocidas. Una cópula elíptica es simplemente una función cuyas variables tienen una distribución elíptica. La cópula gaussiana está dada por:

$$C(u, v|r) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-(t^2 - 2\rho ts + s^2)}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt \quad -1 < r < 1 \quad (14)$$

en la que  $\Phi^{-1}$  es la inversa de la distribución normal y  $\rho$  es la correlación entre las dos variables *t* y *s*.

La cópula *t* de Student se define como:

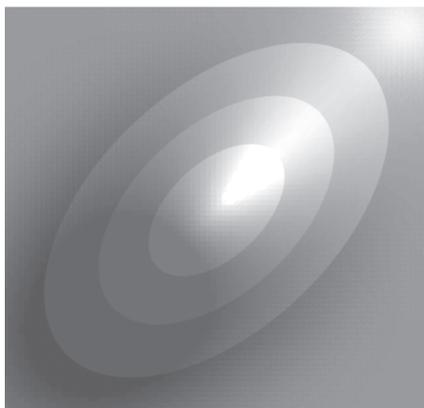
$$C_{v,\rho}(u, v) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{v(1-\rho^2)}\right]^{-\frac{v+2}{2}} dy dx \quad (15)$$

donde  $t^{-1}$  es la inversa de la distribución univariada *t* de Student y *v* es el parámetro que describe la forma de la distribución o grados de libertad. La cópula *t* de Student es útil porque a través del parámetro *v* se capta un fenómeno regular de las series de tiempo financieras: el ancho de las colas. Las colas pesadas se han documentado en varios artículos, entre ellos los de Bradley y Taqqu (2002), y Hyung y de Vries (2007).

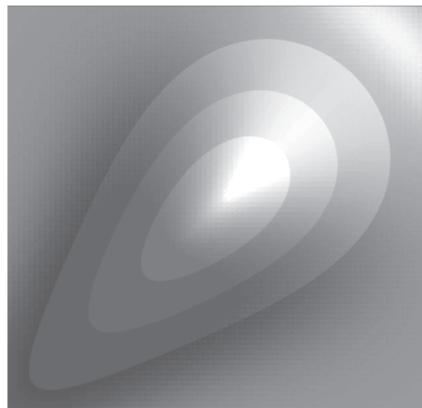
Las gráficas de contorno son herramientas útiles para obtener más información sobre la forma y propiedades de las cópulas. Las gráficas de contorno de las cópulas normal, Clayton, Gumbel y *t* de Student con marginales gaussianas se presentan a continuación:

GRÁFICA 1. Contorno de varias cópulas

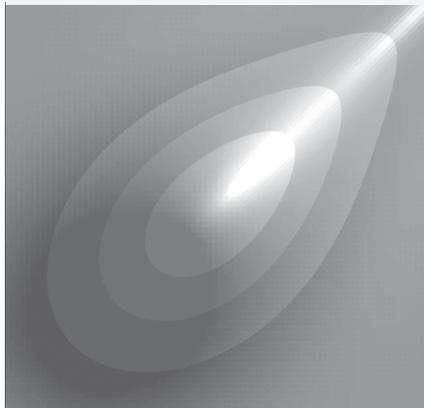
A. Cópula normal,  $\rho = 0.5$



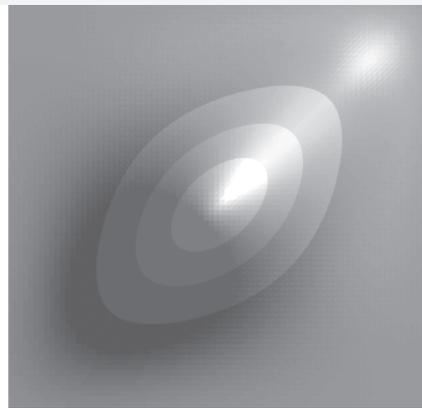
B. Cópula Clayton,  $\theta = 1$



C. Cópula Gumbel,  $\theta = 1.5$



D. Cópula *t* de Student



Se pueden inferir algunas características importantes de estas gráficas. Por ejemplo, la cópula Clayton muestra contornos más agudos en el cuadrante negativo, indicando que eventos negativos ocurren simultáneamente, es decir, las caídas en el mercado accionario de los Estados Unidos ocasionarían caídas en el mercado accionario mexicano. La cópula Gumbel capta el efecto contrario; es decir, los eventos positivos tienen una mayor probabilidad de ocurrir

conjuntamente: *e.g.*, una recuperación en el mercado accionario de los Estados Unidos estaría asociada con una recuperación en el mercado accionario mexicano. La cópula normal muestra una asociación simétrica entre las variables, la probabilidad de ocurrencia de una apreciación y una depreciación conjuntas es la misma. Para la cópula  $t$  de Student también se observa la misma probabilidad para apreciaciones y depreciaciones conjuntas, y una menor probabilidad para apreciaciones de una variable y depreciaciones de la otra.

## II. LA CÓPULA GED

Algunas de las características más prominentes de las variables financieras son la volatilidad, la aglomeración, la persistencia, la asimetría y las colas pesadas en la distribución. Para replicar y modelar el ancho de las colas, algunas aplicaciones han adoptado distribuciones condicionales diferentes a la gaussiana en estimaciones univariadas y multivariadas. Varios estudios sobre el modelaje de datos financieros y de colas pesadas han encontrado que, entre las diferentes distribuciones alternativas, la distribución de error general (GED) domina a otras distribuciones (como la normal, la  $t$  de Student o versiones sesgadas de estas distribuciones); véase Bouaddi y Rombouts (2007) para un ejemplo.

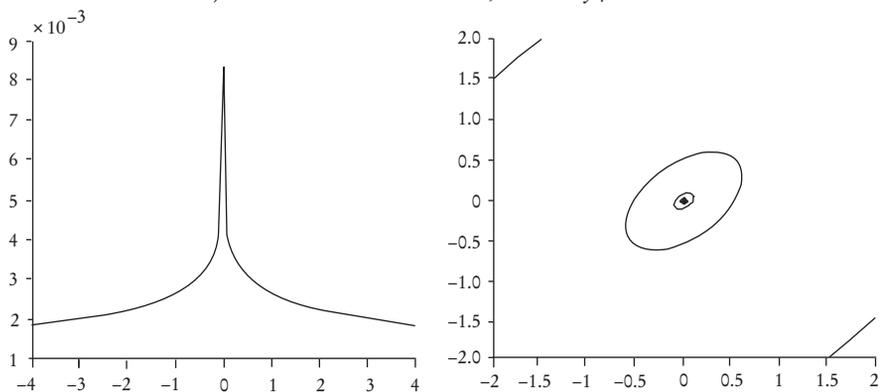
Pero aun cuando la distribución GED ha sido usada con frecuencia en la bibliografía financiera para investigar el comportamiento de activos riesgosos, tipos de cambio, etc. — véanse los trabajos de Nelson (1991), Liesenfeld y Jung (2000) y Komunjer (2007) —, existen pocas referencias que describan el comportamiento estadístico de la distribución GED. Entre los pocos autores que han estudiado esta función encontramos a Chiodi (2000), quien examina las propiedades estadísticas y ofrece pruebas multivariadas de la distribución GED, mientras que Taguchi (1978) explora a detalle las propiedades de la distribución GED bivariada; sin embargo, no pudimos encontrar en la bibliografía referencia alguna a la cópula GED, por lo que esperamos contribuir ofreciendo una nueva cópula, capaz de captar colas pesadas y de replicar las características de funciones de distribución ya conocidas.

### 1. Derivación de la cópula GED

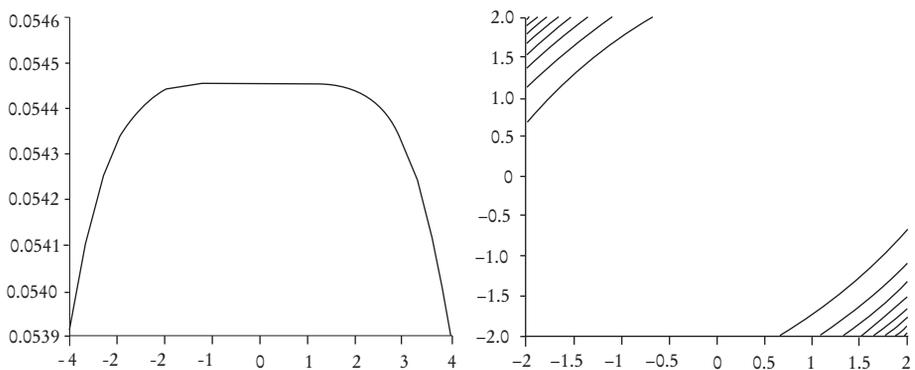
La cópula GED, que se presenta en esta sección, tiene la capacidad de replicar colas pesadas, así como colas delgadas; su forma puede variar de una

GRÁFICA 2. Densidades y contornos de la distribución GED para diferentes valores de  $a$  y  $b$

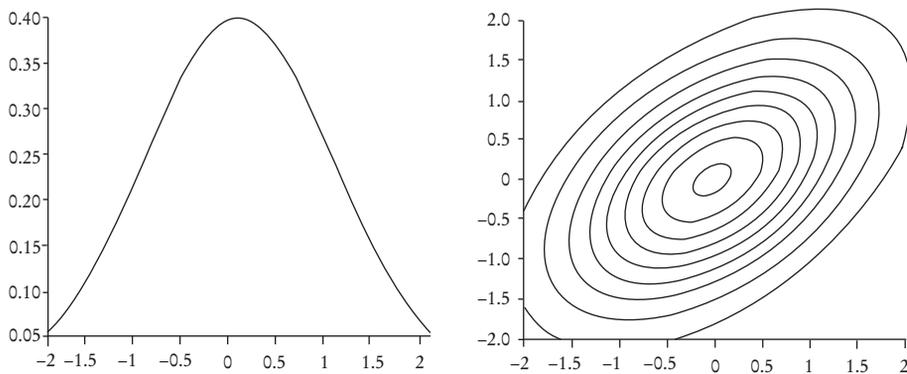
A) Distribución GED con  $a = 0.5$ ,  $b = 0 - 1$  y  $\rho = 0.5$



B) Distribución GED con  $a = 0.5$ ,  $b = 0.1$  y  $\rho = 0.5$



C) Distribución GED con  $a = b = 1$  y  $\rho = 0.5$



campana, idéntica a la distribución normal, a una campana que se asemeja a la distribución uniforme. La nueva cópula GED propuesta en este trabajo es altamente flexible y está basada en la distribución de error general descrita por Lindsey (2001, p. 212), quien presenta la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{a\Gamma\left(1 + \frac{1}{2b}\right) 2^{1 + \frac{1}{2b}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left|\frac{x}{a}\right|^{2b}\right) \tag{16}$$

donde  $a$  es el parámetro de escala y  $b$  es el parámetro de forma o curtosis. Estos dos parámetros captan y describen la estructura de la distribución.  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma y  $x$  es una variable aleatoria. A diferencia de la distribución gaussiana, ésta es una función general para la distribución de errores que no está limitada a una sola distribución particular y que más bien puede replicar muchas otras distribuciones.

Cuando el parámetro  $b$  se encuentra entre (0,1) obtenemos distribuciones leptocúrticas y cuando  $b$  es mayor a 1 obtenemos distribuciones platocúrticas. En la gráfica 2 aparecen densidades y contornos de la distribución GED para diferentes valores  $a$  y  $b$  en los que se muestra la flexibilidad de la distribución.

Para los valores de  $a=1$  y  $b=1$  la distribución GED es igual a la distribución normal. Cuando  $a=10$  y  $b=3$ , la distribución GED se aproxima a la distribución uniforme y, cuando  $a=0.5$  y  $b=0.1$ , la distribución GED se aproxima a la distribución Laplace. Como se puede observar, la distribución GED incluye a un gran rango de distribuciones con diferentes formas de campana y ancho de colas.

La función univariada de Lindsey fue extendida por Balakrishnan (2009) para considerar el caso de dos variables. Enseguida presentamos la función de densidad de probabilidad bivariada GED:<sup>7</sup>

$$h_{GED}(x,y) = \frac{1}{\pi a^2 \sqrt{1-\rho^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) 2^{\frac{1}{b}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{a^2(1-\rho^2)}\right)^b\right) \tag{17a}$$

en la que  $\pi$  es el número  $\pi$ ,  $\Gamma$  es la función  $\gamma$ ,  $a$  es el parámetro de escala,  $b$  es el parámetro de forma (curtosis),  $x$  y  $y$  son variables aleatorias y  $\rho$  es

<sup>7</sup> Esta versión también puede encontrarse en Chiodi (2000).

la correlación entre  $x$  y  $y$ . La función de distribución GED bivariada queda definida por:

$$H_{GED}(b, k) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^k \frac{1}{\pi a^2 \sqrt{1-\rho^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) 2^{\frac{1}{b}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{a^2(1-\rho^2)}\right)^b\right) dy dx \quad (17b)$$

Para derivar la cópula GED con base en esta propuesta de distribución (17b) aplicamos el teorema de Sklar (7) de la siguiente forma:

$$C(u, v) = H_{GED}(H^{-1}(u), H^{-1}(v))$$

Para la implementación final necesitamos las funciones marginales, las cuales se definen respectivamente como:

$$h(y) = \frac{1}{a \Gamma\left(1 + \frac{1}{2b}\right) 2^{1 + \frac{1}{2b}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left|\frac{y}{a}\right|^{2b}\right) \quad 0 < a, 0 < b \leq \infty \quad (18)$$

y

$$h(x) = \frac{1}{a \Gamma\left(1 + \frac{1}{2b}\right) 2^{1 + \frac{1}{2b}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left|\frac{x}{a}\right|^{2b}\right) \quad 0 < a, 0 < b \leq \infty \quad (19)$$

dado que  $H$  es simétrica, *i.e.*,  $h(x) = h(y)$ .

Sustituyendo (18) y (19) en el teorema de Sklar obtenemos la cópula GED:

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{H^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{H^{-1}(v)} \frac{1}{\pi a^2 \sqrt{1-\rho^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) 2^{\frac{1}{b}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{a^2(1-\rho^2)}\right)^b\right) dx dy \quad (20)$$

en la que  $H^{-1}(u)$  y  $H^{-1}(v)$  son las funciones inversas de las marginales univariadas, que pueden encontrarse a partir de (18) y (19), respectivamente.

1. Optimización

Para estimar los parámetros  $\alpha = [a, b, \rho]$  de la cópula GED empleamos la siguiente función de densidad:

$$h_{GED_t}(x_t, y_t; \alpha) = c(u_t, v_t) \cdot b(x_t; \alpha) b(y_t; \alpha) \tag{21}$$

cuya función de verosimilitud  $L(x_t, y_t; \alpha)$  es:

$$L(x_t, y_t; \alpha) = \prod_{t=1}^T h_{GED_t} = \prod_{t=1}^T c(u_t, v_t) \cdot b(x_t; \alpha) b(y_t; \alpha) \tag{22}$$

tomando logaritmos de  $L$ , reexpresamos (22) como:

$$\begin{aligned} \ell(x_t, y_t; \alpha) &= \sum_{t=1}^T \ln [h_{GED_t}(x_t, y_t; \alpha)] \\ &= \sum_{t=1}^T [\ln(c(u_t, v_t)) + \ln(b(x_t; \alpha)) + \ln(b(y_t; \alpha))] \end{aligned} \tag{23}$$

en la que  $c(u_t; v_t)$  es la densidad de la cópula GED,  $u_t = F(x_t; \alpha)$ ,  $v_t = F(y_t; \alpha)$ ,  $b(x_t; \alpha)$  es la función de densidad GED marginal de  $x_t$  y  $b(y_t; \alpha)$  la función de densidad GED marginal de  $y_t$ .

También calculamos los criterios de Akaike y Bayes con las siguientes funciones:

$$AIC = 2k - 2\ell \tag{24}$$

$$BIC = k \ln T - 2\ell \tag{25}$$

en las que  $k$  es el número de parámetros estimados y  $T$  es el número de observaciones en la muestra.

Otra prueba estadística de utilidad es la razón de verosimilitud ( $LR$ ), dada por:

$$LR = 2(L_0 - L_1) \tag{26}$$

en la que  $L_0$  representa la función verosimilitud optimizada (hipótesis nula) del modelo no restringido,  $L_1$  es la verosimilitud optimizada del modelo restringido (hipótesis alternativa) y  $LR$  es la prueba estadística distribuida

CUADRO 1. Estadística descriptiva por niveles y retornos logarítmicos

	Media	Mínimo	Máximo	Desviación estándar	Sesgo	Curtosis	Observaciones	SW <sup>a</sup>	Z <sup>b</sup>	Prob > z
<i>Niveles</i>										
Emerging Market Bond Index (EMBI+)										
Argentina	1220.6754	543.4783	1967.3913	557.2150	-0.0068	-1.8225	374	0.8077	9.2720	0.0000
Brasil	348.6631	180.6452	680.6452	116.8379	0.1249	-1.1920	374	0.8948	7.8420	0.0000
México	287.7350	125.8065	600.0000	119.7935	0.0965	-1.3326	374	0.8916	7.9120	0.0000
Venezuela	1172.7796	543.4783	1891.3043	496.2237	-0.0002	-1.7860	374	0.8225	9.0830	0.0000
América Latina	526.3780	257.6923	900.0000	202.9354	-0.0682	-1.7738	374	0.8243	9.0590	0.0000
<i>Tipos de cambio</i>										
USD/Eur	0.7543	0.6254	0.8571	0.0588	-0.4686	-0.5956	1 151	0.9556	8.6160	0.0000
USD/MXN peso	11.2503	9.8745	15.4900	1.0673	2.0238	3.1523	1 151	0.6790	13.5450	0.0000
<i>Tasas de Interés</i>										
US	3.4438	0.0800	5.4100	1.7325	-0.6376	-0.8431	1 151	0.8742	11.2120	0.0000
México	7.7714	5.1500	10.2000	0.9713	0.5895	-0.0973	1 151	0.9048	10.5190	0.0000
<i>Mercados accionarios</i>										
Standard & Poors	1259.9739	676.5300	1565.1500	197.3830	-0.9706	0.3901	1 151	0.9016	10.6000	0.0000
IPC	22690.9784	11739.9900	32836.1200	6209.9904	-0.0635	-1.2964	1 151	0.9350	9.5670	0.0000
<i>Retornos logarítmicos</i>										
Emerging Market Bond Index (EMBI+)										
Argentina	0.0031	-0.0606	0.1138	0.0202	0.7854	3.5346	373	0.9561	5.7600	0.0000
Brasil	0.0013	-0.1064	0.1178	0.0257	0.3284	3.4550	373	0.9508	6.0340	0.0000
México	0.0022	-0.1170	0.1054	0.0300	-0.1560	2.0132	373	0.9740	4.5170	0.0000
Venezuela	0.0022	-0.1029	0.1092	0.0219	-0.0130	5.4526	373	0.9174	7.2600	0.0000
América Latina	0.0020	-0.0855	0.0846	0.0204	0.3399	3.9173	373	0.9376	6.5960	0.0000
<i>Tipos de cambio</i>										
USD/Eur	0.0000	-0.0403	0.0474	0.0065	0.0472	5.8299	1 150	0.9438	9.2040	0.0000
USD/MXN peso	0.0001	-0.0563	0.0664	0.0069	1.0929	18.0772	1 150	0.8206	12.0930	0.0000
<i>Tasas de Interés</i>										
US	-0.0021	-0.6212	0.5776	0.0803	-1.3980	23.5291	1 150	0.5809	14.2070	0.0000
México	-0.0005	-0.2776	0.2630	0.0257	-0.5930	33.4655	1 150	0.6429	13.8080	0.0000
<i>Mercados accionarios</i>										
Standard & Poors	-0.0002	-0.0947	0.1096	0.0152	-0.1862	10.7570	1 150	0.8418	11.7810	0.0000
IPC	0.0006	-0.0727	0.1044	0.0161	0.1933	4.8075	1 150	0.9394	9.3920	0.0000

<sup>a</sup> Prueba de normalidad Shapiro Wilks. <sup>b</sup> Prueba de normalidad.

como  $\chi_n^2$ , con  $n$  grados de libertad, igual número de restricciones (Hamilton 1991, pp. 144-145).

$L_0$  se define como la verosimilitud de la cópula GED. Esta nueva cópula, como hemos visto, anida dentro de sí una familia de cópulas: *e.g.*, cuando  $b = 0.5$  se obtiene la cópula Laplace con colas anchas y cuando  $b = 1$ , se obtiene la cópula normal.

### III. RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN

En esta sección usamos los retornos logarítmicos de los precios diarios de diferentes activos: tipos de cambio, tasas de interés, acciones y mercados de deuda soberana. El objetivo es estimar la cópula GED propuesta en este trabajo y comparar su desempeño estadístico con otras cópulas populares, usadas frecuentemente en la bibliografía, como las arquimideanas (Clayton y Gumbel) y las elípticas (normal y  $t$  de Student).

#### 1. Datos

Comenzamos investigando el riesgo de contagio de la prima al riesgo de la deuda soberana en cuatro países latinoamericanos: Argentina, Brasil, México y Venezuela. Obtuvimos datos diarios del Emerging Bond Market Index (EMBI+ por sus siglas en inglés) de JP Morgan para los países mencionados del periodo 17/04/2008-25/04/2009. Enseguida, para examinar el contagio financiero obtuvimos datos del periodo 03/01/2005-01/06/2009 de los siguientes activos: tipos de cambio (peso mexicano *vs.* dólar americano, *i.e.*, USD/MXN y dólar americano *vs.* euro, *i.e.*, EU/EURO), tasas de interés (mercados de bonos Mexicano y de los Estados Unidos), y acciones (S&P500 e Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores). Para investigar si las medidas de asociación y dependencia cambian antes y después de la crisis financiera dividimos la muestra general en dos subperiodos: precrisis y crisis.

En el cuadro 1 presentamos la estadística descriptiva de los retornos diarios de todas las muestras consideradas en este estudio. Se observa que los retornos EMBI+ son mayores en todos los casos y tienen en general una mayor variabilidad que las acciones o los tipos de cambio. Cabe mencionar que las tasas de interés de los Estados Unidos muestran los menores retornos logarítmicos a la inversión y el mayor riesgo de reinversión para el

periodo considerado. Al mismo tiempo, excepto por los retornos del EMBI+ de México, todos los retornos logarítmicos muestran exceso de curtosis, algún grado de sesgo y en general desviaciones de la normalidad, como lo indican las pruebas en las últimas tres columnas del cuadro.

Estas desviaciones respecto a la distribución normal, las colas anchas y el comportamiento no lineal de los retornos de los activos son características que sugieren fuertemente considerar distribuciones condicionales y no condicionales alternativas a la normal. La distribución  $t$  de Student, por ejemplo, ha sido usada por Bollerslev (1987) y Hsieh (1989) para el examen de los rendimientos logarítmicos, mientras que la distribución GED ha sido usada por Baillie y Bollerslev (1989) y Nelson (1991).

La bibliografía que investiga bonos soberanos, tipos de cambio, acciones y tasas de interés se realiza en su mayoría en países desarrollados, pero algunos estudios se han llevado a cabo para investigar el contagio en mercados emergentes usando cópulas, principalmente en mercados accionarios (véanse Ozun y Ozbakis, 2007; Mendes *et al.*, 2007, y Rodríguez, 2007, para algunos ejemplos). En este sentido, nuestro trabajo también contribuye a la bibliografía de la crisis financiera y del contagio en mercados emergentes.

## 2. Estimación

El primer paso en la estimación de nuestra cópula GED es obtener las distribuciones marginales  $u$  y  $v$ . Éstas se encuentran, en primer término, mediante el cálculo de los retornos logarítmicos de los activos financieros:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (27)$$

en la que  $r_t$  es el retorno logarítmico,  $P_t$  es el precio del activo en el periodo  $t$  y  $\ln$  es el logaritmo natural. En segundo término, de acuerdo con aplicaciones recientes de cópulas y mercados financieros, empleamos los residuos de modelos univariados GARCH como las distribuciones marginales (véanse Triveddi y Zimmer, 2005; Patton, 2006, y Rodríguez, 2007, por ejemplo). En este trabajo ajustamos el modelo GARCH(1,1) de Bollerslev (1986), que se ha convertido en uno de los modelos de volatilidad condicional empíricos más útiles en el modelaje de series de tiempo financieras. Las funciones marginales estimadas están distribuidas normalmente con media  $\mu$  y va-

rianza  $\sigma^2$ , esto es  $u = Z(\varepsilon_x)$  y  $v = Z(\varepsilon_y)$ , donde  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$  son residuos de modelos GARCH(1,1). Partimos del supuesto de que  $Z(\varepsilon_x) \sim N(\mu, \sigma)$  y  $Z(\varepsilon_y) \sim N(\mu, \sigma)$ .

### 3. Riesgo de contagio en mercados de bonos soberanos

En el cuadro 2 presentamos los parámetros estimados para todas las copulas, incluida la GED, y para todos los pares de países considerados. Con el fin de comparar el ajuste y otras medidas de desempeño estadístico, usamos las mismas funciones marginales<sup>8</sup> y reportamos errores estándar robustos en paréntesis, los criterios de decisión de Akaike y de Schwartz, así como la función de verosimilitud optimizada, respectivamente.

El cuadro 2 muestra que de entre todas las cópulas arquimideanas y elípticas consideradas en este estudio, la cópula GED provee los menores valores para los criterios de Akaike y Schwarz. La competidora más cercana es la cópula normal, seguida de cerca por la cópula  $t$  de Student, pero incluso en este último caso que modela explícitamente la posibilidad de colas anchas, la cópula GED describe mejor a los datos y provee un ajuste más satisfactorio que estas dos populares alternativas.

La verosimilitud optimizada es mayor para la cópula GED, lo que refuerza nuestra conclusión en favor de nuestra propuesta elíptica. Adicionalmente examinamos nuestros resultados restringiendo los parámetros de la cópula GED para obtener las cópulas Laplace y normal y mostrar las pruebas de relación de verosimilitud (parte baja de la cuadro 2). De nuevo encontramos fuerte evidencia en favor de la cópula GED.

En la gráfica 3 mostramos los contornos de la cópula GED para los mercados de deuda soberanos de Argentina-Brasil, Argentina-México y Brasil-México. La forma de campana en los dos primeros casos indica que las desviaciones de la media no son grandes, lo que indica retornos pequeños que crecen y decrecen conjuntamente. En el caso de Brasil-México (figura c) encontramos colas más anchas, lo que sugiere que los retornos crecen y decrecen conjuntamente en mayores proporciones. En otras palabras, el riesgo de contagio en los mercados de deuda soberana es mayor entre México y Brasil que entre cualquier otro par de países considerado en este estudio.

<sup>8</sup> No reportamos las estimaciones GARCH(1,1) de Bollerslev (1986) para ahorrar espacio, pero los resultados están disponibles con los autores.

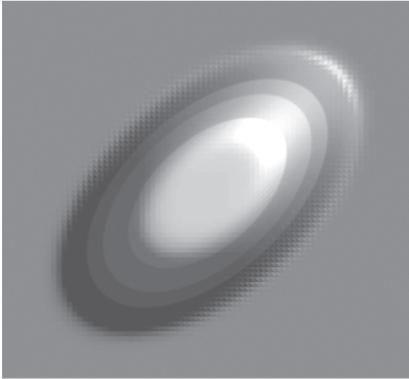
CUADRO 2. Resultados de la estimación y pruebas de razones de verosimilitud

	Argentina- Brasil	Argentina- México	Argentina- Venezuela	Argentina- América Latina	Brasil- México	Brasil- Venezuela	Brasil- América Latina	México- Venezuela	México- América Latina	Venezuela- América Latina
<i>Clayton</i>										
$\theta$	1.4991 -1705.5 3 413 3 416.92	1.0704 -1679.5 3 361.01 3 364.93	1.1834 -1789.4 35 80.77 35 84.69	1.8481 -1792.1 3 586.18 3 590.10	3.5582 -1461 2 924.06 2 927.98	1.553 -1650.1 3 302.15 3 306.07	5.5019 -1427.9 2 857.80 2 861.72	1.0345 -1635.7 3 273.47 3 277.39	3.2454 -1536.2 3 074.34 3 078.26	2.1872 -1689.3 3 380.59 3 384.52
<i>Gumbel</i>										
$\theta$	1.7495 -1659.4 3 320.72 3 324.64	1.5352 -1641.3 3 284.69 3 288.61	1.5917 -1732.7 3 467.46 3 471.38	1.9241 -1724.9 3 451.71 3 455.63	2.7791 -1394.5 2 790.94 2 794.86	1.7765 -1601.6 3 205.28 3 209.21	3.751 -1390 2 782.09 2 786.01	1.5173 -1581 3 163.91 3 167.83	2.6227 -1478.9 2 959.84 2 963.76	2.0936 -1626.7 3 255.34 3 259.26
<i>Normal</i>										
$\rho$	0.6753 -936.87 1 875.74 1 879.67	0.5549 -982.99 1 967.97 1 971.90	0.645 -948.22 1 898.43 1 902.36	0.7221 -914.18 1 830.37 1 834.29	0.8519 -815.09 1 632.18 1 636.10	0.7292 -911.75 1 825.50 1 829.42	0.9388 -658.94 1 319.88 1 323.80	0.6414 -955.62 1 913.24 1 917.16	0.8591 -807.69 1 617.38 1 621.30	0.8157 -850.33 1 702.66 1 706.58
<i>Student t</i>										
$\rho$	0.6808 3.7E+07	0.5603 4.1E+07	0.6522 3.7E+07	0.7263 3.5E+07	0.8527 3.7E+07	0.7324 3.5E+07	0.9391 3.2E+07	0.6443 3.7E+07	0.8594 3.7E+07	0.8174 3.4E+07
$v$	-936.84 1 877.69 1 885.53	-982.97 1 969.94 1 977.79	-948.18 1 900.35 1 908.20	-914.16 1 832.33 1 840.17	-815.09 1 634.18 1 642.02	-911.74 1 827.48 1 835.32	-658.94 1 321.87 1 329.72	-955.61 1 915.22 1 923.07	-807.69 1 619.38 1 627.22	-850.32 1 704.64 1 712.49
<i>GED</i>										
$\rho$	0.5188 (-0.040) <sup>d</sup> 2.9958	0.4039 (-0.0473) 2.9576	0.5059 (-0.0449) 2.8459	0.5677 (-0.0578) 3.105	0.6904 (-0.0585) 2.779	0.5592 (-0.0790) 2.5511	0.8415 (-0.250) 2.8537	0.4958 (-0.0376) 2.7697	0.7087 (-0.026) 3.3166	0.6504 (-0.068) 2.6545
$b$	(-1.9807) -650.52 1 307.05 1 318.81	(-4.4710) -695.77 1 397.55 1 409.31	(-2.3084) -670.63 1 347.25 1 359.02	(-9.6055) -624.41 1 254.83 1 266.59	(-2.6241) -563.66 1 133.31 1 145.08	(-4.3471) -669.65 1 345.31 1 357.07	(-99.86) -426.8 859.607 871.372	(-1.6157) -688.11 1 382.21 1 393.98	(-2.044) -527.98 1 061.96 1 073.72	(-4.512) -612.8 1 231.59 1 243.36
<i>Prueba de relación de verosimilitud (GED vs)</i>										
Laplace	2 013.72	2 018.12	1 994.16	2 023.61	1 915.61	1 891.97	1 841.61	1 957.51	1 980.17	1 865.44
Normal	572.643	574.395	555.099	579.496	502.864	484.17	464.265	535.011	559.423	475.051

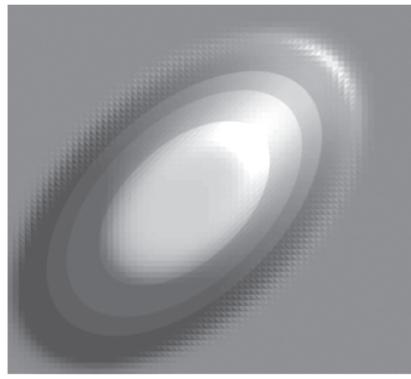
<sup>a</sup> Valor optimizado de la verosimilitud. <sup>b</sup> Criterio de información de Akaike. <sup>c</sup> Criterio de información de Bayes. <sup>d</sup> Estadístico  $t$ .

GRÁFICA 3. Contorno de las cópulas GED para el mercado de bonos soberanos

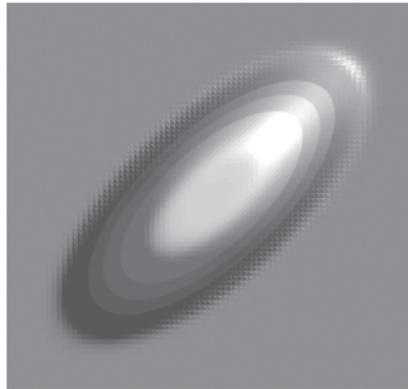
A. Cópula GED: Argentina-Brasil



B. Cópula GED: Argentina-Venezuela



C. Cópula GED: Brasil-México



#### 4. Contagio en los tipos de cambio, bonos y mercados de capital

Ahora nos concentramos en la medición del riesgo de contagio entre los Estados Unidos y México al examinar los tipos de cambio (dólar americano *vs.* peso, USD/MXN y dólar *vs.* euro, USD/EURO); el fondeo gubernamental y los mercados de capitales. En este caso la muestra total abarca del 03/01/2005 al 01/06/2009 y nos interesa examinar en particular cómo cambió la asociación de los mercados financieros antes y después de la crisis. El momento de contagio en los mercados es distinto y definimos heurísticamente la fecha de corte como sigue: para los mercados de bonos el 19/09/2007 (cuando las tasas de interés de los Estados Unidos comenzaron a caer), para los tipos de

cambio el 27/08/2008 (cuando la depreciación del peso fue evidente) y para los mercados accionarios el 06/06/2008.

En el cuadro 3 se presentan resultados obtenidos estimando la cópula GED para estos mercados en los tres periodos. Para verificar si los parámetros del contagio en cada cópula son distintos antes y durante la crisis usamos la prueba de Wald. La hipótesis nula de que  $\rho$  y  $b$  son iguales en ambos subperiodos se rechazó a un nivel de 5%. Observamos que la interrelación de los países medida por  $\rho$  es más intensa durante la crisis para los tres mercados. En los mercados cambiario y accionario, las depreciaciones (y apreciaciones) conjuntas resultaron más frecuentes durante la crisis que antes de la crisis respectivamente, y en el mercado de bonos las tasas de interés bajas en un mercado y tasas altas en el otro son más frecuentes durante la crisis.

CUADRO 3. *Estimación de resultados de la cópula GED antes y durante la crisis*

	Tipos de cambio			Tasas de interés			Mercado accionario		
	Muestra completa	Precrisis	Crisis	Muestra completa	Precrisis	Crisis	Muestra completa	Precrisis	Crisis
$\rho^a$	0.1205 (0.0441) <sup>b</sup>	0.0285 (0.0363)	0.1302 (0.0733)	-0.0579 (0.0532)	-0.0345 (0.0709)	-0.0843 (0.0670)	0.5475 (0.0774)	0.4918 (0.0441)	0.6119 (0.1049)
$b^c$	2.3407 (0.4903)	2.6500 (0.6676)	2.7755 (1.5091)	2.3209 (0.6104)	2.6783 (1.2877)	2.2701 (0.7526)	2.4405 (2.3661)	2.9348 (2.1260)	2.5310 (3.0331)
$L(\theta)^d$	-2393.9	-1978.0	-398.6	-2330.2	-1359.9	-955.7	-2069.5	-1587.5	-433.5
$AIC^e$	4793.8	3962.0	803.2	4666.3	2725.7	1917.4	4145.0	3181.0	872.9
$BIC^f$	4809.0	3976.6	813.1	4681.5	2739.4	1929.7	4160.2	3195.4	883.6
$\rho_1 = \rho_2^g$		51.7145*			1.8E10 <sup>^9</sup> *			72.12*	
$b_1 = b_2^g$		4.5001*			24.8697*			22.6464*	

\* Significativo a 5%. <sup>a</sup> Coeficiente de correlación. <sup>b</sup> Error estándar en paréntesis. <sup>c</sup> Parámetro de ancho de cola. <sup>d</sup> Verosimilitud optimizada. <sup>e</sup> Criterio de información Aikaike. <sup>f</sup> Criterio de información Bayes. <sup>g</sup> Prueba Wald para la igualdad de los parámetros entre los periodos pre crisis y crisis.

El coeficiente de curtosis  $b$ , que mide la forma de la distribución, es mayor durante la crisis en los mercados cambiarios y de capitales; lo que indica que efectivamente durante la crisis las colas de las distribuciones son más pesadas (mayor probabilidad de valores extremos) que en relación con el periodo estable. Cabe notar que en el mercado de bonos se observa un menor parámetro  $b$  durante la crisis, lo que indica una menor probabilidad de valores extremos durante la crisis. Ésta es una observación consistente con los eventos ocurridos en los mercados que reflejan algunas características particulares de esta crisis: mientras que las acciones y los tipos de cambio mostraron una alta volatilidad durante la crisis, los mercados de bonos permanecieron

muy estables y, de hecho, la liquidez se trasladó de mercados riesgosos a mercados tradicionalmente menos riesgosos (créditos y reinversiones).

### CONCLUSIONES

Las cópulas son funciones que unen dos funciones marginales, y tienen la capacidad de describir comportamientos no lineales, asimetría y no normalidad. En este trabajo presentamos una nueva cópula bivariada basada en una distribución comúnmente usada en las finanzas empíricas: la distribución GED. A pesar del uso extendido de dicha distribución, hasta ahora no se había propuesto en la bibliografía una cópula con distribución de error generalizado. Usando cuatro mercados (bonos soberanos, tipos de cambio, acciones y mercado de bonos) comparamos nuestra nueva cópula GED con las cópulas elípticas y arquimideanas más usadas. La principal ventaja de esta nueva cópula reside en su capacidad de replicar el comportamiento de varias distribuciones, desde la exponencial y la normal a la uniforme, con el atributo adicional de captar las colas pesadas comúnmente detectadas en activos financieros. Todos los criterios estándar de decisión muestran evidencia fuerte a favor de la cópula GED sobre sus más cercanas competidoras: la distribución normal, la  $t$  de Student y las principales cópulas arquimideanas, usadas frecuentemente en la bibliografía financiera.

Debido a la magnitud de la crisis de 2008-2009 y el contagio a países emergentes, en este artículo examinamos en particular el contagio en una muestra de países emergentes para varios mercados: riesgo soberano de deuda, mercados accionarios, tipos de cambio y mercado de bonos. El uso de la nueva cópula GED propuesta en este artículo permite no sólo modelar la asociación no lineal entre los mercados, sino además captar de manera natural el fenómeno de las colas pesadas, reportado muy frecuentemente para activos financieros. Entre los resultados encontramos que en los mercados de deuda soberana de Argentina-Brasil y Argentina-México, los rendimientos se mueven de manera conjunta, *i.e.*, riesgos soberanos bajos en un país, se acompañan normalmente de riesgos bajos en el otro. En el caso del riesgo soberano de Brasil y México se detectan colas pesadas, lo que sugiere que los retornos soberanos crecen y decrecen conjuntamente en proporciones mucho mayores a las normales. Es decir, el riesgo de contagio en los mercados de deuda soberana es mayor entre México y Brasil que entre cualquier otro par de los países considerados.

Por otra parte, también encontramos una asociación mucho más fuerte entre los mercados cambiarios de deuda y de capitales de los Estados Unidos y México durante la crisis, en relación con periodos más estables. En particular, en el mercado cambiario existe evidencia de que las colas de la distribución que describe la asociación entre estos dos países son más pesadas.

Extensiones potenciales de la cópula GED en el futuro pueden incluir parámetros de cola con inercia, efectos de asimetría (*leverage effects*) e incluso memoria larga. También puede extenderse esta cópula al caso multivariado y permitir que la correlación entre las marginales cambie con el tiempo, con el fin de dotar a la cópula de mayor realismo. Una posibilidad son los modelos de correlación condicional dinámica (DCC) iniciados por Engle (2002). Algunas propuestas recientes en este sentido son las de Lorán, Heinen y Valdesogo (2009) y las cópulas estocásticas autorregresivas (SCAR) de Hafner y Manner (2010).<sup>9</sup>

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alexander, C. (2008), *Market Risk Analysis, Pricing Hedging and Trading Financial Instruments*, The Wiley Finance Series, vol. III, Londres, Wiley & Sons.
- Arakeliand, V., y P. Dellaportas (2005), "Contagion Tests via Copula Threshold Models", University of Crete, mimeografiado.
- Baillie, R. T., y T. Bollerslev (1989), "The Message in Daily Exchange Rates: a Conditional Variance Tale", *Journal of Business and Economic Statistics* 7, pp. 297-305.
- Balakrishnan N., y C. D. Lai (2009), *Continous Bivariate Distributions*, Springer Science+Business Media, LLC.
- Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, vol. 31, pp. 307-327.
- (1987), "A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return", *Review of Economics and Statistics* 69, pp. 542-547.
- Bouaddi, M., y J. V. K. Rombouts (2007), "Mixed Exponential Power Asymmetric Conditional Heteroskedasticity", *Cahiers de Recherche*, núm. 0749.
- Bouyé, E., V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet y T. Roncalli (2000), "Copulas for Finance a Reading Guide and Some Applications", disponible en SSRN, núm. 1032533.
- Bradley, B. O., y M. S. Taqqu (2002), "Financial Risk and Heavy Tails", S. T. Rachev, *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Elsevier/North Holland, pp. 35-103.

<sup>9</sup> Los autores agradecen los comentarios de un dictaminador anónimo que hizo notar estas posibilidades.

- Cherubini U., E. Luciano y W. Vecchiato (2004), *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons.
- Chen, Qiwen (2006), "CDO Pricing and Copula Method", Working Paper, University of Maryland.
- Chen, X., y Y. Fan (2006), "Estimation and Model Selection of Semiparametric Copula Based Multivariate Dynamic Models under Copula Misspecification", *Journal of Econometrics* 135, pp. 125-154.
- Chiodi, M. (2000), "Le curve normali di ordine  $p$  come distribuzioni di errori accidentali: una rassegna dei risultati e problemi aperti per il caso univariato e per quello multivariato", Atti Della XL Riunione Scientifica Della SIS (Sociedad Estadística Italiana), pp. 59-60, versión extendida en <http://dssm.unipa.it/chiodi/>.
- Chollette, L., V. de la Peña y C. C. Lu (2005), "Comovement of International Financial Markets", Norwegian School of Economics and Business, mimeografiado.
- Clemen, R. T., y T. Reilly (1999), "Correlations and Copulas for Decision and Risk Analysis", *Management Science*, vol. 45, núm. 2, pp. 208-224.
- Demarta, S., y A. J. McNeil (2005), "The  $t$  Copula and Related Copulas", *International Statistical Review*, vol. 73, núm. 1, pp. 111-129.
- Embrechts, P. (2009), "Linear Correlation and EVT: Properties and Caveats", *Journal of Financial Econometrics*, vol. 7, núm. 1, pp. 30-39.
- \_\_\_\_\_, y A. Höing (2006), "Extreme VaR Scenarios in Higher Dimensions", ETH Zurich, mimeografiado.
- \_\_\_\_\_, F. Lindskog y A. McNeil (2003), "Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management", S. T. Rachev, *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Elsevier/North Holland, cap. 8.
- Engle, R. F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, vol. 50, pp. 987-1008.
- \_\_\_\_\_ (2002), "Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models", *Journal of Business & Economic Statistics*, American Statistical Association, vol. 20(3), julio, pp. 339-350.
- Fantazzini, D. (2004), "Copula's Conditional Dependence Measures for Portfolio Management and Value at Risk", L. Bauwers y W. Pohlmeier, Summer School in Economics and Econometrics of Market Microstructure, Universidad de Constanza.
- Frees, E. W., y E. A. Valdez (1997), "Understanding Relationships Using Copulas", *North American Actuarial Journal*, vol. 2, pp. 1-25.
- Genest, C., y L. P. Rivest (1993), "Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 88(423), pp. 1034-1043.
- Gómez E., M. A. Gómez-Villegas, y J. M. Marín (1998), "A Multivariate Generalization of the Power Exponential Family of Distributions", *Communications in Statistics*, 27(3), pp. 589-600.

- Greenwood, P. E., y M. S. Nikulin (1996), *A Guide to Chi-Squared Testing*, Wiley.
- Hafner, C. M., y H. Manner (2008), "Dynamic Stochastic Copula Models: Estimation, Inference and Applications", *Research Memoranda* 043, Maastricht: METEOR, Maastricht Research School of Economics of Technology and Organization.
- Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton U Press.
- Harvey, A., y T. Chakravarty (2008), "Beta-t-(E)GARCH", Cambridge Working Papers in Economics 0840, Faculty of Economics, University of Cambridge.
- Hoeffding, W. (1940), "Scale Invariant Correlation Theory", N. I. Fisher y P. K. Sen (eds.), *The Collected Works of Wassily Hoeffding*, Nueva York, Springer Verlag, pp. 57-107.
- \_\_\_\_ (1941), "Scale Invariant Correlation Measures for Discontinuous Distributions", N. I. Fisher y P. K. Sen (eds.), *The Collected Works of Wassily Hoeffding*, Nueva York, Springer Verlag, pp. 109-133.
- Hogg, R. V., y S. A. Kugman (1984), "Loss Distributions", Wiley, Series de Probabilidad y Estadística.
- Hsieh, D. A. (1989), "Modeling Heteroscedasticity in Daily Foreign-Exchange Rates", *Journal of Business and Economic Statistics* 7, pp. 307-317.
- Hull J., y A. White (1998), "Value at Risk when Daily Changes and Market Variables are Not Normally Distributed", *Journal of Derivatives*, 5, pp. 9-19.
- Hurd, M., M. H. Salmon y C. Schleicher (2005), "Using Copulas to Construct Bivariate Foreign Exchange Distributions with an Application to the Sterling Exchange Rate Index", CEPR Discussion Paper, núm. 5114.
- Hyung, N., y C. G. de Vries (2007), "Portfolio Selection with Heavy Tails", *Journal of Empirical Finance*, 14(3), pp. 383-400.
- Joe, H., y T. Hu (1996), "Multivariate Distributions from Mixtures of Max-Infinitely Divisible Distributions", *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 57, núm. 2, pp. 240-265.
- Komunjer, I. (2007), "Asymmetric Power Distribution: Theory and Applications to Risk Measurement", *Journal of Applied Econometrics* 22, pp. 891-921.
- Liesenfeld, R., y R. C. Jung (2000), "Stochastic Volatility Models: Conditional Normality versus Heavy Tail Distributions", *Journal of Applied Econometrics*, 15, 137-160.
- Lindsey, J. K. (2001), "Nonlinear Models in Medical Statistics", Oxford University Press, Series de Ciencia Estadística.
- Longin, F., y B. Solnik (2001), "Extreme Correlation of International Equity Markets", *Journal of Finance*, vol. 56, pp. 649-676.
- Lorán, C., y A. Heinen y A. Valdesogo (2009), "Modeling International Financial Returns with a Multivariate Regime-switching Copula", *Journal of Financial Econometrics*, Society for Financial Econometrics, vol. 7(4), pp. 437-480.
- Lucchetti, R. (2002), "Analytical Score for Multivariate GARCH Models", *Computational Economics*, Springer vol. 19, núm. 2, pp. 133-143.

- Malevergne, Y., y D. Sornette (2001), "Testing the Gaussian Copula Hypothesis for Financial Assets Dependences", *EconWPA*, Series de Finanzas, núm. 0111003.
- Melchiori, M. R. (2003), "Which Archimedean Copula is the Right One?", *Yield-Curve*.
- Mendes, B. V. M., R. Leal y A. Carvahal-da-Silva (2007), "Clustering in Emergin Equity Markets", *Emerging Markets Review*, vol 8, núm. 3, pp. 194-205.
- Mikosch, T. (2006), "Copulas: Tales and Facts", *Extremes*, vol. 9, núm. 1, pp. 3-20.
- Mineo, A. M., y M. Ruggieri (2005), "A Software Tool for the Exponential Power Distribution: The Normal Package", *Journal of Statistical Software*, vol. 12, núm. 4.
- Nelsen, R. B. (1999), "An Introduction to Copulas", Springer-Verlag.
- Nelson, D. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A new Approach", *Econometrica*, 59, pp. 349-370.
- Ozun, A., y G. Ozbakis (2007), "A Non Parametric Copula Analysis on Estimating Return Distribution for Portfolio Management", *Investment Management and Financial Innovations*, vol. 4, Issue 3, p. 57.
- Patton, A. J. (2006), "Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence", *International Economic Review*, vol. 47, núm. 2, pp. 527-556.
- \_\_\_\_ (2009), "Copula-Based Models for Financial Time Series", T. G. Anderson *et al.* (eds.), *Handbook of Financial Time Series*, Berlín, Springer-Verlag.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery (1992), "Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, p. 616.
- Rodríguez, J. C. (2007), "Measuring Financial Contagion: a Copula Approach", *Journal of Empirical Finance* 14(3), pp. 401-423.
- Schönbucher, P. J., y D. Schubert (2001), "Copula-Dependent Default Risk in Intensity Models", *Default Risk*, <http://www.defaultrisk.com/>.
- Shemyakin, A. E., y H. Young (2006), "Copula Models of Joint Survival Analysis", *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, vol. 22, núm. 2, pp. 211-224.
- Simon, C. P., y L. Blume (1994), *Mathematics for Economists*, W.W. Norton and Company.
- Simonato, J. G. (1992), "Estimation of GARCH Process in the Presence of Structural Change", *Economics Letters*, vol. 40, pp. 155-158.
- Sklar, A. (1959), "Fonctions de repartition á  $n$  dimensions et leurs marges", *Publications de l'Institut Statistique de l'Universit'e de Paris*, vol. 8, pp. 229-231.
- Taguchi, T. (1978), "On a Generalization of Gaussian Distribution", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 30(A), pp. 211-242.
- Tibiletti, L. (1995), "Beneficial Changes in Random Variables via Copulas: an Application to Insurance", *The GENEVA Papers on Risk and Insurance-Theory*, vol. 20, núm. 2, pp. 191-202.
- Trivedi, P. K., y D. M. Zimmer (2005), "Copula Modeling: An Introduction for Practitioners", *Foundations and Trends in Econometrics*, The Essence of Knowledge, vol. 1.

- Verschuere, B. (2006), "On Copulas and their Application to CDO Pricing", Default Risk, January, [http://www.defaultrisk.com/pp\\_crdrv132.htm](http://www.defaultrisk.com/pp_crdrv132.htm).
- Wu, M. L. (2007), "Modelling Dependent Risks for Insurer Risk Management: Experimental Studies with Copulas", thesis, University of New South Wales.